新撰 幾何學教科書

（平面）

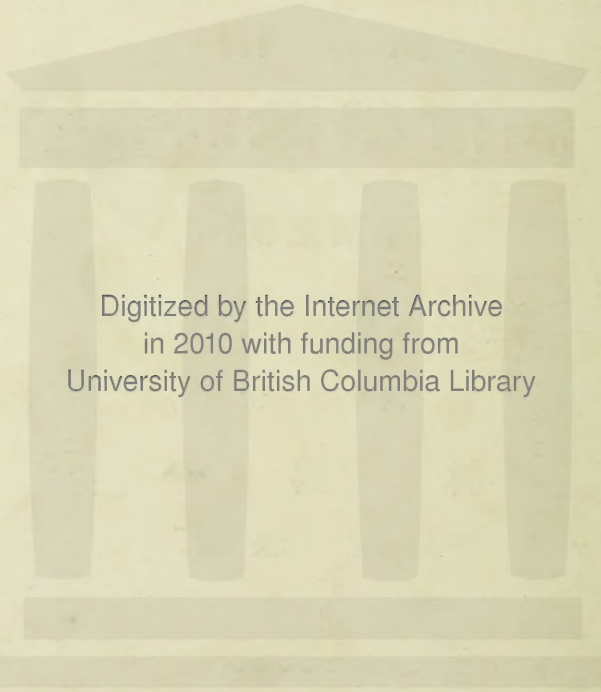
（四十五年版）

文 部 省 檢 定 濟

明治四十五年三月十四日　中學校・師範學校數學科用

新　撰

幾何學教科書

〔平面之部〕

東北帝國大學理科大學教授

理　學　士

林　鶴　一

編　著

開成館藏版

改正要目準據

修正改版ノ序

今次ノ改版ハ主トシテ中學校師範學校教授要目ノ改訂ニ起因ス。次ニ其ノ改訂ノ要點ヲ擧グ。

一。新教授要目ノ示セル所ニ隨ヒ,算術及ビ代數ト密接ナル聯絡ヲ保タシメタルコト。

二。作圖題ニ吟味ヲ加ヘタルコト。

三。用語ノ統一ヲ計リ,嚴正的確ナランコトヲ勉メタルコト。

四。最近ノ諸官立各種高等學校入學試驗問題ヲ採擇セルコト。

今ヤ中等教育數學界ニ於テ本書存在ノ意義ハ既ニ十分ニ認メラレタリ。次ニ存錄セル初版ノ序ノ如キ,轉タ雞肋ノ感ナキニアラズ。

明治四十四年十二月　　著者

本書中ニハ，最近ノ高等各種學校入學試驗問題ヲ撰擇シ，分類シテ適當ノ所ニ記載シタリ。蓋生徒ガ其既得ノ知識ヲ應用シテ力試シヲナスニ，趣味アル究竟ナル練習問題タルヲ失ハザルベシ。

學校名ノ略語ノ例

[大　豫]……………………高等學校大學豫科
[東　工]……………………東京高等工業學校
[大　工]……………………大阪高等工業學校
[名　工]……………………名古屋高等工業學校
[長　商]……………………長崎高等商業學校
[山　商]……………………山口高等商業學校
[東　師]……………………東京高等師範學校
[盛　農]……………………盛岡高等農林學校
[海　兵]……………………海軍兵學校
[海　機]……………………海軍機關學校
[商　船]……………………商船學校
[陸　士]……………………陸軍士官學校
[水　產]……………………水產講習所
[農　實]……………………農科大學實科
[醫　專]……………………醫學專門學校

序

本書ハ余ガ新撰統合數學敎科書ノ平面幾何ノ部ヲ成スモノナリ。初等幾何學書ノ現時ニ行ハルヽモノ尠カラザレドモ,多クハ其主義ニ因循ノ點多ク,其比例論ハ徒ニ冗繁ニシテ學生ノ腦力ニ適セズ。其他計算ニ關スル應用問題ニ乏シキガ如キモ亦其缺點ナリトス。

本書ハ此缺點ニ鑑ミ編纂シタルモノニシテ,本來之ヲ實地ノ敎科ニ用ヒ充分ノ鍛錬ヲ重ネテ後發行セシモノナリ。尙編纂ニ附キ意ヲ用ヒタル點二三ヲ擧グレバ次ノ如シ。

1. 證明ハ記號ヲ併用シ,簡單ニシテ嚴正ヲ失ハズ。

2. 往々定理及設問ノ論證ヲ省略セシモノアリ,學生ヲシテ之ヲ補充セシムベシ。

3. 問題ノ選擇ハ大ニ留意セシ所ニシテ,直ニ其前ナル命題ヲ應用スルガ如クシ,又處々ニ其解法ノ指針ヲ示セリ。

4. 軌跡ハ之ヲ作圖ノ中間ニ置キ,其應用ヲ知ラシメタリ。

5. 比ハ之ヲ盡數及ビ不盡數ノ場合ニ區別シ,簡明ニ且嚴正ニ之ヲ論ゼリ。挿ミ合ヒノ如ク捕捉スルニ困難ナル患ナカルベシ。

6. 幾何學ニ於ケル代數學ノ應用ヲ說キ,求積ニ關スル計算問題ヲ加ヘタリ。代數學的幾何學ハ極メテ必要ナリトス。

7. 定理ノ陳述中ニ符號ヲ挿メルハ別ニ圖ニ就キテ格段ナル場合ヲ指示スルノ煩ヲ避ケタルガ爲ニシテ,之ヲ取去レバ直ニ一般ノ陳述トナルモノナリ。

明治三十八年十月

林鶴一識

目次

第三篇　面　積

第四篇　比　例

第五篇　正多角形及圓

附　　録

記　號

幾何學ニ於テ記號ヲ併用スレバ論證ヲ簡明ナラシムルノ利益アリ,今普通ニ用フル記號ヲ次ニ掲グ。

∠	角。	⊥	垂直。
△	三角形。	□	正方形。
▭	矩形。	▱	平行四邊形。
∥	平行。	=	相等。
≡	合同,全等。	≠	不等。
>	ヨリ大ナリ。	<	ヨリ小ナリ。
≯	ヨリ大ナラズ。	≮	ヨリ小ナラズ。
~	差。	∽	相似。

注意。星標＊ヲ附シタル箇所ハ初讀ノ際之ヲ省略シテ可ナリ。

幾　何　學

緒　　論

1. **幾何學**ハ物體ノ形,大サ及位置ヲ論ズル學問ナリ。

2. 空間ノ有限ノ部分ヲ**立體**ト云ヒ,立體ノ限界ヲ**面**ト云フ。面ノ限界又ハ二面ノ交ル處ヲ**線**ト云ヒ,線ノ限界又ハ二線ノ交ル處ヲ**點**ト云フ。

立體ハ形,大サ及位置ヲ併有ス。面ハ廣サヲ有スルモ厚サヲ有セズ。線ハ長サヲ有スルモ幅及厚サヲ有セズ。點ハ全ク大サヲ有セズ,唯位置ヲ有スルノミ。

3.　線ノ中ニテ最簡單ナルモノヲ直線トス。何人モ直線ヲ想像シ得ザルコト無カルベシ。引張レル細キ絲ハ其形ヲ呈ス。嚴格ニ云ヘバ

直線トハ其何レノ部分ヲ取リテ之ヲ如何樣ニ他ノ何レノ部分ノ上ニ重ヌルモ全ク密著スル線ナリ。

直線ハ雙方ヘ限リナク長シ,其一部分ヲ考フルトキハ之ヲ**有限直線**又ハ**線分**ト云ヒ,之ニ對シテ前者ヲ**無限直線**ト云フコトアリ。

本書ニ於テハ直線ヲ略シテ單ニ線ト云フコト多シ。

4.　**二點間ノ距離**トハ其二點ヲ兩端トセル有限直線ノ長サヲ云フ。

5.　**折線**トハ二ツ以上ノ接續セル線分ノ集合ニシテ各線分ヲ**邊**ト云フ。

6.　**曲線**トハ何レノ部分モ直線ナラザル線ナリ。

7.　吾人ハ實際眞ノ點,線,面等ヲ作ル能ハズ。便宜ノ爲,點又ハ線ヲ圖ニテ示スモ是レ眞ノ點又ハ線ニアラズ。

8.　**平面**トハ其面中ニアル任意ノ二點ヲ通過スル直線ガ全ク其面ニ密著スル面ナリ。

9.　**曲面**トハ何レノ部分モ平面ナラザル面ナリ。

10.　鉛筆ノ尖頭ヲ紙上ニ走ラシムルトキハ一ノ黑條ヲ生ズ。若眞ノ點ガ運動スレバ其通路ハ眞ノ線ナリ。

同理ニテ一般ニ線ノ運動ニ由テ面ヲ生ジ面ノ運動ニ由テ立體ヲ生ズ。

線ノ運動ニ由テ面ノ生ゼザルコトアリヤ。

又面ノ運動ニ由テ立體ノ生ゼザルコトアリヤ。

11. **圖形**トハ立體,面,線,點又ハ其集合ナリ。

直線ノミノ集合ニヨリテ成レル圖形ヲ**直線圖形**ト云フ。

平面圖形トハ一ノ平面中ニ在ル圖形ナリ。故ニ點及線ヨリ成ル。

12. **平面幾何學**ハ平面圖形ノミヲ論ズ。其他ノ圖形ノ考究ハ**立體幾何學**ニ屬ス。

13. 一ノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ重ネ全ク合セシメ得ルトキ,此二ツノ圖形ハ**合同**或ハ**全等**ナリト云フ。

合同ナル圖形ノ大サハ相等シ。

幾何學ニ於テ或圖形ノ位置ヲ變ジ之ヲ他ノ圖

形ノ上ニ重ヌルコトハ單ニ實行シタルモノト想像スルヲ以テ足レリトス。斯ノ如ク或圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ重ネテ考察スルコトヲ**重置法**ト云フ。

14.　種々ノ圖形ヲ取扱フニハ之ニ名ヲ附シテ指シ示ス必要アリ。其爲ニハ主トシテA,B,C,D等ヲ用フ。a, b, c又ハα, β, γ等ハ多クハ其量ヲ表スニ用ヒラル。

點ヲ示スニハ一ノ文字ヲ以テシ,線ヲ示スニハ通常二ツノ文字ヲ以テス。

其他ノ圖形ヲ示スニハ其圖形中ノ著シキ諸點ヲ示ス所ノ文字ヲ併列ス。

15.　今幾何學ニ於テ用ヒラルル一二ノ用語ヲ次ニ揭グ。

命題トハ或事項ノ說述ナリ。

定義トハ用語ノ意義ヲ定ムル命題ナリ。

公理トハ經驗ニ依リテ眞ナリト假定シタル命題ナリ。

サレバ公理ハ其眞僞ニツキ疑ヲ挾ムノ要ナキ程明白ナル命題ナリ。

系トハ或命題ヨリ容易ニ眞ナルコトヲ知リ得ベキ命題ナリ。

16. 公理ヲ分チテ**普通公理**及**幾何學公理**ノ二種トス。前者ハ廣ク總テノ量ニ適シ,後者ハ特ニ幾何學上ノ圖形ニ關ス。

17. 普通公理ノ主ナルモノヲ次ニ擧グ。

1. 同量ニ等シキ二量ハ相等シ。

2. 全量ハ其諸部分ノ和ニ等シ。從テ全量ハ一部分ヨリ大ニシテ一部分ハ全量ヨリ小ナリ。

3. 二ツ以上ノ量ノ和ハ之ヲ加フル順序ニ係ラズ皆相等シ。

4. 等量ト同量又ハ等量トノ和或ハ差ハ相等シ。

5. 等量ノ同倍量或ハ同分量ハ相等シ。

6. 不等量ト同量又ハ等量トノ和或ハ差ハ相等シカラズ。

7. 大ナル諸量ノ和ハ小ナル諸量ノ和ヨリ

大ナリ。

18. 次ニ幾何學公理ヲ擧グ。

公理 I. 直線ハ其中ニ在ル任意ノ二點間ノ最短通路ナリ。

公理 II. 二點ヲ過グル直線ハ一アリ而シテ唯一ニ限ル。

之ヲ換言シテ**二點ハ一直線ヲ決定ス**ト云フ。

系一. 二點又ハ一部分ヲ共有スル二直線ハ相合シテ同一ノ直線トナル。

系二. 二直線ノ交點ハ唯一ナリ。

公理 III. 直線ノ兩側ニ在ル二點ヲ連ヌル直線ハ其直線ト交ル。

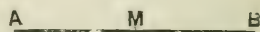
公理 IV. 圖形ノ位置ヲ變ズルモ其形及大サハ變ズルコトナシ。

公理 V. 平面ノ一部分ハ其中ニ在ル任意ノ直線ヲ折目トシテ之ヲ折返シ他ノ部分ニ重ヌルコトヲ得。

平面幾何學

第一篇
直線圖形

第一章
直線角

19. **定義.** 線分ヲ合同ナル二部分ニ分ツ點ヲ其**中點**又ハ**二等分點**ト云フ。

例ヘバ AM=MB ナルトキハ M ハ AB ノ中點ナリ。

線分ノ中點ハ一アリ而シテ唯一ニ限ル。

20. **定義.** 線分ノ中ニ在ル點ハ之ヲ內分スト云ヒ又ハ單ニ**分ツ**ト云フ。又其延長ノ中ニ在ル點ハ此線分ヲ外

分スト云フ。

例ヘバ P ハ AB ヲ内分シ, P' 又ハ P'' ハ AB ヲ外分ス。

内分ノ場合ニ於テハ

$$AB=AP+PB.$$

外分ノ場合ニ於テハ

$$AB=AP'-BP',$$

或ハ

$$AB=BP''-AP''.$$

無限直線 XY ノ部分 BY ヲ AB ノ延長ト云ヒ, AX ヲ BA ノ延長ト云フ。

問　題

(1)　A, B, C ヲ一直線中ノ三點トシ M, N ヲ AB, BC ノ各中點トス。 $AB=a$ 尺, $BC=b$ 尺ナルトキ MN ノ長サ如何。

(2)　M ヲ線分 AB ノ中點トシ P ヲ内分點トシ $AP=9$ 寸, $PB=5$ 寸トセバ MP ノ長サ如何。

一般ニ　$MP=\frac{1}{2}(AP\sim BP)$。

(3)　M ヲ線分 AB ノ中點トシ, Q ヲ外分點トシ, AQ=30 尺, BQ=6 尺トセバ MQ ノ長サ如何。

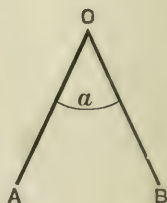
一般ニ　$MQ=\frac{1}{2}(AQ+BQ)$。

(4)　M ヲ線分 AB ノ中點トシ, P ヲ内分點トシ, AB=15 尺, MP=3 尺トセバ AP, PB ノ長サ如何

一般ニ　$AP=\frac{1}{2}AB\pm MP$,　$PB=\frac{1}{2}AB\mp MP$.

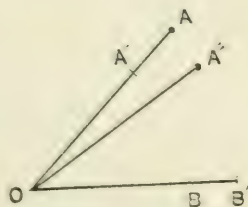
21.　定義.　角トハ一點ヨリ出ヅル二直線ヨリ成ル圖形ナリ。此點ヲ角ノ**頂點**ト云ヒ, 二直線ヲ角ノ**邊**ト云フ。

例ヘバ O 點ヨリ出ヅル二直線 OA, OB ハ角ヲ作レリ。之ヲ示スニハ頂點ノ文字ヲ各邊中ノ點ヲ示ス文字ノ間ニ置クモノトス。例ヘバ ∠AOB 又ハ ∠BOA ノ如シ。

時トシテハ角ヲ示スニ其頂點ノ一ツノ文字ヲ以テスルコトアリ。例ヘバ ∠O ノ如シ。

又ハ頂點ニ近ク二邊ノ間ニ置キタル一ツノ文

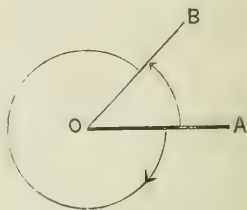
字ヲ以テスルコトアリ。例ヘバ∠αノ如シ。

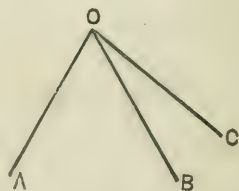
22. 角ハ大サヲ有ス,而シテ其大サハ其二邊ノ長短ニ關セズ。

例ヘバA及Bヲ運動場ニ於ケル二人ノ位置トシ,Oヲ觀測者ノ位置トス。O,A,Bノ三點ガ一直線中ニ在ラザルトキハ角AOBヲ生ズ。今Aニアル人ガ直線AO上ヲ歩ミ漸次Oニ近ヅキテA′ニ來リ,Bニアル人ハ直線OB上ヲ歩ミ漸次Oヲ遠ザカリテB′ニ來ルトスルモ,點Oヨリ見タル二人ノ方向ハ夫々前ト異ナラズ,卽∠AOB=A′OB′ナリ。

然レドモ一人ガ若AO上ニアラザル點A″ニ來ルトキハ∠A″OB′≠AOBナリ。

23. 直線OAノ一端Oヲ固定シ之ヲ周リテ平面ヲ離ルルコトナク,此線ヲ廻轉スト想像スルトキ,此線ハ常ニ其原位置ニ對シ絶エズ增大スル角ヲ生ズベシ,此廻轉ノ分量ハ卽所謂角ノ大サナ

リ。故ニ角ノ大サハ此動線ノ廻轉ノ分量ニ依ル。

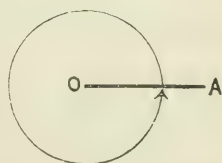
動線 OA ヲ OB ノ位置ニ至ラシムルニハ二樣ノ廻轉アリ,卽圖ニ於テ示セルガ如クーハ時計ノ針ノ廻轉ト同ジク他ハ之ニ反ス,故ニ一點ヨリ出ヅル二直線ハ通常二角ヲ作ルト考フルヲ得,此二角ハ頂點ト二邊トヲ共有ス,斯ノ如キ二角ヲ**共軛角**ト云ヒ,大ナル方ヲ**優角**,小ナル方ヲ**劣角**ト云フ。今後單ニ角ト云ハバ常ニ劣角ヲ指スモノト知ルベシ。

二直線ガ角ヲ成セバ之ヲ此二線ノ**夾角**ト云ヒ,二線ガ此角ヲ夾ムト云フ。

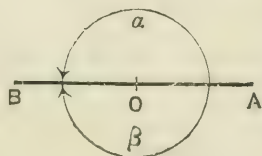
24. 定義. 隣接角トハ頂點ト一邊トヲ共有シ且此共有邊ノ兩側ニ在ル二角ナリ。

例ヘバ角 AOB ト角 BOC トハ隣接角ナリ

25. **定義.** 角ノ頂點ヲ過ギ此角ヲ合同ナル隣接角ニ分ツ直線ヲ其**二等分線**ト云フ。

例ヘバ ∠AOM＝BOM ナルトキ OM ハ角 AOB ノ二等分線ナリ。

角ノ二等分線ハ一アリ而シテ唯一ニ限ル。

26. **定義.** 直線ノ一端ヲ固定シ此點ヲ周リテ此直線ヲ廻轉シ,其原位置ニ至ラシムルトキ生ゼル角ヲ**周角**ト云フ。

共軛角ノ一ガ周角ナルトキ他ノ角ノ大サハ零ナリ。

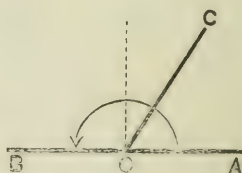
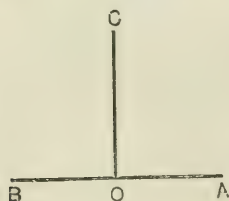
27. **定義.** **平角**トハ其二邊ガ頂點ノ兩側ニ在リテ一直線ヲ爲ス角ナリ。

例ヘバ角 ACB 即 α 又

ハ β ノ如シ。

平角ハ周角ノ半ナリ。

28. **定義.** 直線(OC)ガ一點(O)ニ於テ他ノ直線(AB)ニ會シ合同ナル隣接角(AOC, COB)ヲ作ルトキ初ノ直線(OC)ハ後ノ直線(AB)ノ**垂線**ナリト云フ。

之ヲ OC⊥AB ト記ス。

直線 OC ハ平角 AOB ノ二等分線ナリ。

直線(OD)ガ一點(O)ニ於テ直線(AB)ニ會シ合同ナラザル隣接角ヲ作ルトキ初ノ直線(OD)ハ後ノ直線(AB)ノ**斜線**ナリト云フ。

二線ノ會點(O)ヲ垂線或ハ斜線ノ**足**又ハ**趾點**ト云フ。

29. **定義.** **直角**トハ其一邊ガ他ノ邊ノ雙方ヘ延長セラレタルモノノ垂線ナルトキノ角ナリ。

例ヘバ前節ノ左圖ニ於ケル角AOC又ハ角COBノ如シ。

直角ハ平角ノ半ニシテ,平角ハ二直角ニ等シ。

30. **定義.** **鋭角**トハ直角ヨリ小ナル角ナリ。

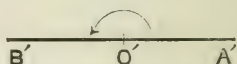
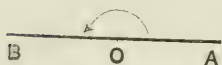
31. **定義.** **鈍角**トハ直角ヨリ大ニシテ平角ヨリ小ナル角ナリ。

32. **定義.** **定理**トハ定義,公理及既ニ眞ナルコトヲ知リタル命題ニヨリテ推理ヲ以テ其眞ナルコトヲ知ル命題ナリ。

定理ハ**假設**及**終結**ヨリ成ル,而シテ假設ヨリ終結ヲ得ル所以ヲ論ズル方法ヲ**證明**ト云フ。

33.　定理一.　平角ハ皆相等シ。

［假設］　AOB, A′O′B′ ヲ二ツノ平角トス。

［終結］　∠AOB=A′O′B′.

［證明］　角 AOB ヲ角 A′O′B′ ノ上ニ置クニ頂點 O ヲ O′ ノ上ニ,邊 OA ヲ O′A′ ノ上ニ重ヌルトキ,直線 AOB 及 A′O′B′ ハ其一部分ヲ共有スル故合同ナリ(18 系一)。

故ニ此二ツノ平角モ亦合同ナリ(13)。

即　　　∠AOB=A′O′B′.　　　(重置法)

系.　直角ハ皆相等シ(17 公理 5)。

34.　測角ノ六十分法.　直角ハ其大サ一定セルヲ以テ角ノ大サノ單位トシテ其 $\frac{1}{90}$ ニ等シキ角ヲ用ヒ,之ヲ**度**ト云フ。度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**分**トシ分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**秒**トシ之ヲ補助單位トナス。

故ニ　1周角＝2平角＝4直角＝360度。

又直角ノ十六分ノ一ニ等シキ角ハ五度三十七

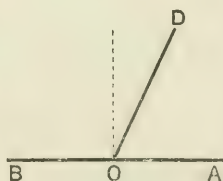
分三十秒ナリ,之ヲ5°37′30″ト記ス。

問　題

(1) 時計ノ分針ハ一分間ニ幾度ノ角ヲ通過スルカ。又十五分間ニハ如何。又一時二十分間ニハ如何。

(2) 時計ノ時針ガ一分間,一時間,四時四十分間ニ通過スル角ノ大サ各如何。

35. 定理二. 一直線ガ他ノ直線ニ會シテ隣接角ヲ爲セルトキ其和ハ二直角ニ等シ。

[假設] 直線OCガ他ノ直線ABニO點ニ於テ會シ,隣接角AOC, COBヲ爲ス。

[終結]

∠AOC+COB=2直角。

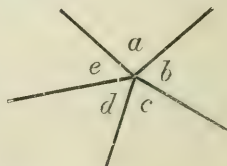
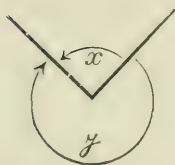
[證明] 此隣接角ノ和ハ平角AOBナリ(17公理2). 故ニ二直角ニ等シ(29)。

系一. <u>一直線上ノ一點ヨリ其同側ニ出ヅル</u>

若干ノ直線ト此線トニテ爲セル總テノ相隣レル角ノ和ハ二直角ニ等シ。

系二. 一點ヨリ出ヅル數多ノ直線ニテ爲セル總テノ相隣レル角ノ和ハ四直角ニ等シ。

例ヘバ $x+y=1$ 周角 $=360^\circ$,

$a+b+c+d+e=4$ 直角。

36. 定義. 二角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ各角ヲ他ノ角ノ補角ト云フ。

37. 定義. 二角ノ和ガ直角ニ等シキトキハ各角ヲ他ノ角ノ餘角ト云フ。

問題

(1) $64^\circ 59' 36''$ ノ角ノ補角ノ大サ如何。

(2)　52°18′14″ノ角ノ餘角ノ大サ如何。

(3)　隣接角ノ大サ160°及20°ナルトキ其二等分線ノ間ノ角ノ大サ如何。

(4)　二個ノ直角AOB, CODガ頂點Oヲ共有スルトキ二角AOD, BOCハ相等シキカ又ハ互ニ補角ナリ。

38.　定理三.　隣接角ノ共有ニアラザル二邊ガ一直線上ニ在ラザルトキ其和ハ二直角ニ等シカラズ。

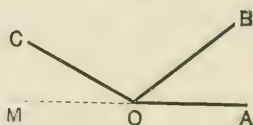
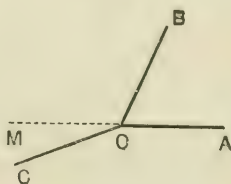
[假設]　角AOBト角BOCトヲ隣接角トシ,其邊OAトOCトハ一直線上ニアラズトス。

[終結]

$\angle AOB + BOC \neq 2$直角。

[證明]　AOヲ延長シテAOMトス。

然ラバ$\angle AOB + BOC$卽AOCハ

$\angle AOB + BOM$卽平角AOMヨリ小ナルカ(甲圖),

又ハ大ナリ(乙圖)(17公理2).

然ルニ平角ハ二直角ニ等シ(29)。

故ニ $\angle AOB + BOC$ ハ二直角ニ等シカラズ。

系. 隣接角ノ和ガ二直角ニ等シキトキ其共有ニアラザル二邊ハ一直線ヲナス。

其故ハ共有ニアラザル邊ガ一直線ヲナサズトスレバ隣接角ノ和ガ二直角ニ等シキコト能ハザレバナリ。

問　題

(1) 順次ニ隣レル角ヲ AOB, BOC, COD ガ夫夫 105° 30′, 15° 20′, 69° 10′ ナルトキ AO, OD ハ一直線ヲナスヤ否ヤ。

(2) 角ノ二邊ハ其二等分線ノ延長ト等角ヲナス。

(3) 二直線 AOB, COD ガ相交リテ爲セル角 AOC ノ大サガ 45° ナルトキ他ノ三角ノ大サ各如何。

39. 定義. 角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ノ延長ナルトキハ此二角ヲ對

頂角ト云フ。

二直線ガ相交ルトキハ二雙ノ對頂角ヲ爲ス。

40. 定理四. 對頂角ハ相等シ。

[假設] 直線 AOB, COD ガ O ニ於テ相交リ對頂角 AOC, BOD 及ビ COB, DOA ヲ爲ス。

[終結] ∠AOC=BOD, ∠COB=DOA。

[證明] 角 AOC, COB, BOD, DOA ヲ順次ニ a, b, c, d ニテ表ス。然ラバ

AOBハ直線ナル故 $\angle a+b$ ハ二直角ニ等シ(35)。

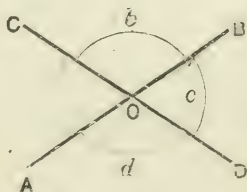
同樣ニ $\angle b+c$ モ亦二直角ニ等シ(35)。

$\therefore \angle a+b=b+c$ (17)。

此等量ヨリ $\angle b$ ヲ減ズレバ　$\angle a=c$ (17)。

同樣ニ　$\angle b=d$。

系一. 二直線ガ相交リテ爲セル四角ノ中,其一ガ直角ナルトキハ他ノ三角モ亦直角ナリ。

系二. 一直線ガ他ノ直線ノ垂線ナルトキハ其延長モ亦後ノ直線ノ垂線ナリ。

系三. 一直線ガ他ノ直線ノ垂線ナルトキハ後者ノ兩部分ハ雙方ヘ延長セラレタル前者ノ垂線ナリ。

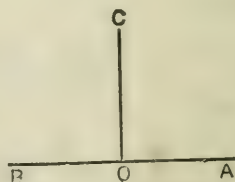
注意. 斯ノ如ク相交レル二直線ハ互ニ**垂直**ナリ或ハ互ニ**直交**スト云ヒ,然ラザル二直線ハ互ニ**斜交**スト云フ。

問　　題

(1) 二直線ガ相交リテ爲セル四角ノ二等分線ハ互ニ直交スル二直線ナリ。

(2) 角ノ二等分線ノ延長ハ其對頂角ノ二等分線ナリ。

41. 定理五. 一直線(AB)中ノ一點(O)ヲ過グル此線ノ垂線ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] O ヲ過グル AB ノ垂線ハ平角 AOB ノ二等分線ナリ(28). 然ルニ角ノ二等分線ハ一アリ,而シテ

唯一ニ限ル(25)。

故ニOヲ過グルABノ垂線ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

問　題

(1) 角ノ二等分線ガ此角ノ頂點ヲ過グル直線ノ垂線ナルトキ此直線ハ角ノ二邊ト等角ヲ爲ス又此直線ハ此角ニ隣レル補角ヲ二等分ス。

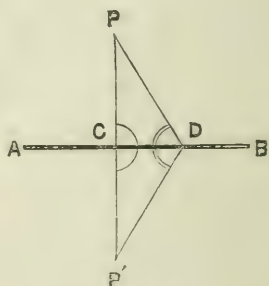
注意。此線ヲ元ノ角ノ**外二等分線**ト云フコトアリ,之ニ對シテ二等分線ヲ**內二等分線**ト云フ。

(2) 一點Oヨリ順次ニ四直線OA, OB, OC, ODヲ引キ相隣ラザル二角ガ夫々相等シキトキAOC, BODハ何レモ直線ナリ。

(3) 直線AOBノ兩側ニ二直線OC, ODアリテ∠AOC=BODナルトキハCODハ一直線ヲ爲ス。

42. 定理六. 一直線(AB)外ノ一點(P)ヲ過グル此線ノ垂線ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明]　ABヲ折目トシPヲ有スル平面ノ部分ヲ折返シ,他ノ部分ニ重ヌレバPハP′ノ如キ位置ニ來ルベシ。直線PP′ヲ引ケ(公理II)。然ルトキハABトPP′トノ交點ヲCトセバ角PCBハP′CBニ合スル故相等シク(13),從テPCBハ直角ナリ(29),故ニPCAモ亦直角ナリ(40系一)。故ニPCハABノ垂線ナリ。故ニPヨリABニ一ノ垂線ヲ引クヲ得。

次ニ任意ノ他ノ直線PDヲ取レバ平面ヲ折返ストキ角PDCハ角P′DCニ合スル故相等シク(13),從テ角PDCハPDP′ノ半ナリ。

然ルニPCP′ハ一直線ナル故PDP′ハ一直線ニアラズ(18公理II),從テ角PDP′ハ二直角ニ等シカラズ(38),故ニPDCハ直角ニアラズ(普通公理)。

故ニPDハABノ斜線ナリ。

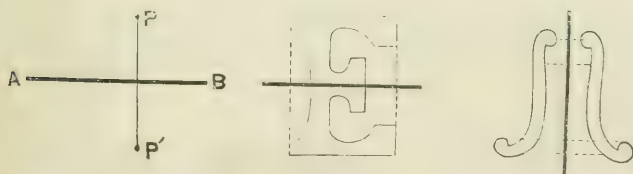
故ニPヨリABニ引キ得ル垂線ハ唯一ニ限ル。

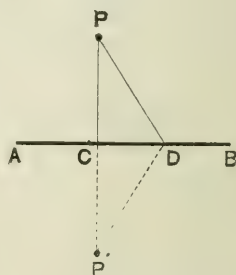
43.　定義.　線分(PP′)ノ中點(C)ヲ過

ギ此線分ニ垂直ナル直線(AB)ハ此線分ノ**垂直二等分線**ト云フ。又其直線ハ此線分ヲ**直角ニ二等分ス**トモ云フ。

44. 定義. 二點(P,P′)ハ之ヲ連ヌル線分ノ垂直二等分線(AB)ニ關シテ**對稱**ナリト云ヒ,其垂直二等分線(AB)ヲ對稱ノ**軸**ト云フ。

平面圖形ガ一直線ニ關シテ對稱ナリトハ其圖形上ニアル各對ノ點ガ皆其直線ニ關シテ互ニ對稱ナルヲ云フ。

故ニ直線ニ關シテ對稱ナル圖形ハ之ヲ折目トシテ折返ストキ其一部分ヲ或他ノ部分ト合セシムルコトヲ得ベシ。

45.　定理七.　直線(AB)外ノ點(P)ヨリ此線へ引ケル垂線(PC)ハ之ヨリ引ケル任意ノ斜線(PD)ヨリ小ナリ

[證明]　BAヲ折目トシ圖形CPDヲ有スル平面ノ部分ヲ折返シ,之ヲ他ノ部分ニ重ヌルトキ　CPD　ガ　CP′D　トナレリトスレバ角PCD, P′CDハ夫々直角ニシテ(公理IV),其和ハ

二直角ナル故PCP′ハ一直線ナリ(38系)。然ルニ

$$直線 PCP' < PD + DP'. \qquad (公理 I)$$

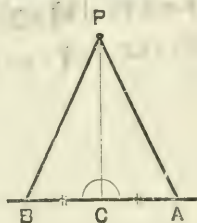
$$\therefore \qquad 2PC < 2PD. \qquad (普通公理)$$

$$\therefore \qquad PC < PD. \qquad (普通公理)$$

46.　定義.　點ト直線トノ距離トハ此點ヨリ其直線ニ引ケル垂線ノ長サナリ。

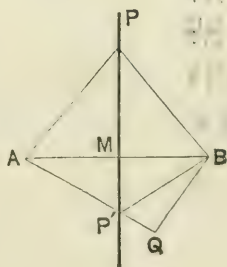
47.　定理八.　一直線(AB)外ノ一點(P)ヨリ此線へ垂線及二斜線ヲ引キ其

垂線ノ足(C)ヨリ二斜線ノ足(A,B)ニ至ル距離ガ相等シキトキ(CA=CB),其二斜線(PA, PB)ハ相等シ。

[證明]　二點A, Bハ軸PCニ關シテ對稱ナリ(**44**)。故ニPCヲ折目トシテ圖形PACヲ折返セバAハBニ合シPAハPBニ合ス。

∴　　PA=PB。

系一.　有限直線ABノ垂直二等分線PP′中ノ任意ノ點Pハ兩端A, Bヨリ等距離ニ在リ。而シテ其線外ノ任意ノ點Qハ不等距離ニ在リ。

[證明]　直線ABノ二斜線PA, PBノ足ハ垂線PMノ足ヨリ等距離ニアリ。故ニ相等シ。

二線分QA, QBノ中何レカ一ツハPP′ト交ル。若シ

QA ガ之ト P′ ニ於テ交ルトセバ $AP'=BP'$。

然ルニ $BQ<BP'+P'Q$ （公理 I)

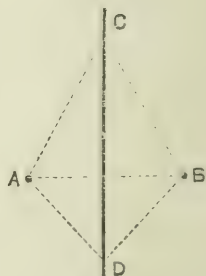
而シテ $BP'+P'Q=AF'+P'Q=AQ$。

$\therefore \quad BQ<AQ$。

若シ QB ガ PP′ ト交ルトセバ

$BQ>AQ$。

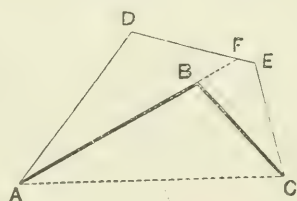
系二. 二定點 A, B ヨリ等距離ニ在ル二點ヲ過グル直線 CD ハ此二定點ヲ連ヌル直線 AB ノ垂直二等分線ナリ。

其故ハ AB ノ垂直二等分線ガ C 點ヲ通過セズトスレバ $CA \neq CB$ トナリテ假設ニ反シ，又 D 點ヲ通過セズトスレバ $DA \neq DB$ トナリテ假設ニ反スレバナリ。

48. 定義. 凸折線トハ何レノ邊ヲ延長スルモ其兩端ヲ連ヌル線分ト之トニテ圍マレタル圖形內ニ入込ムコトナキ折線ナリ。

49. 定理九. 凸折線ハ其兩端ニ止マリテ之ヲ包圍スル如何ナル線ヨリモ小ナリ。

[假設] ABC ヲ凸折線トシ ADEC ヲ以テ之ヲ包圍セル任意ノ線トス。

[終結] ABC<ADEC。

[證明] AB ノ延長ガ DE ト F ニ於テ交ルトスレバ

$$ABF < ADF \text{ 及 } BC < BFEC。\qquad (\text{公理I})$$

$$\therefore\ ABF + BC < ADF + BFEC。\quad (\text{普通公理})$$

兩邊ヨリ共通ノ部分 BF ヲ減ズレバ

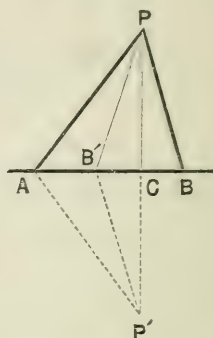
$$ABC < ADEC。\qquad (\text{普通公理})$$

凸折線ノ邊數ガ三ツ以上アル場合モ亦同樣ナリ。

50. 定理十. 一直線外ノ一點ヨリ此線ヘ引ケル二斜線ノ中,其足ガ垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニ在ル方ガ他ヨリ大ナリ。

［假設］　$PC \perp AB$　トシ $CA > CB$ トス。

［終結］　$PA > PB$。

［證明］　CB' ヲ CB ニ等シトセバ B' ハ CA ヲ内分ス。

又 P' ヲ直線 AB ニ關スル P ノ對稱點トシ AP'. $B'P'$, $B'P$ ヲ引ケバ

$$AP = AP',\quad B'P = B'P'.$$

而シテ前定理ニ依リテ折線 $PAP' > PB'P'$.

$$\therefore\quad 2PA > 2PB,\quad \therefore\quad PA > PB.$$

系一.　一點ヨリ一直線ニ至ル相等シキ二斜線ノ足ハ垂線ノ足ヨリ等距離ニアリ。

系二.　一點ヨリ一直線ニ至ル相等シカラザル二斜線ノ中,大ナル方ノ足ガ垂線ノ足ヨリ大ナル距離ニアリ。

系三.　一點ヨリ一直線ニ至ル相等シキ斜線ハ二ツアリ,而シテ唯二ツニ限ル。

問　　題

(1) 一點ヨリ一直線ヘ垂線及斜線ヲ引クトキ，垂線ト等角ヲナス二斜線ハ相等シ。

(2) 一點ヨリ一直線ニ至ル相等シキ斜線ハ垂線ト等角ヲ爲シ,又此線ト等角ヲ爲ス。

(3) 一點ヨリ一直線ニ至ル相等シキ斜線ハ垂線ニ關シテ對稱ナリ。

第　二　章

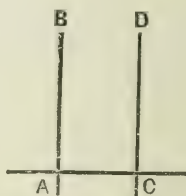
平　行　線

51. 定義. 平行線トハ同一ノ平面中ニ在リテ何程遠ク雙方ヘ延長スルモ相交ラザル二直線ナリ。

二直線 AB, CD ガ平行ナルコトヲ AB∥CD ト記ス。

注意. 同一ノ平面中ニ在ル二直線ハ十分之ヲ延長スレバ相交ルカ,又ハ平行ナリ。相會スル二直線ヲ**相交線**ト云フ。

52. 定理十一. 同一ノ直線(AC)ニ垂直ナル二直線(AB, CD)ハ平行ナリ。

[證明] 若 AB, CD ガ或點 O ニ於テ交ルトセバ其點 O ヨリ一直線 AC ニ至ル二ツノ垂線ヲ得。然ルニ一點ヨリ一直線ニ至ル垂線ハ唯一ツニ限ル(42)。故ニ AB, CD ハ何程遠ク延長スルモ相交ルコトナシ。

∴ AB ∥ CD。

注意。 此定理ノ證明ノ如ク,終結ヲ非認セバ定義,公理若シクハ既ニ證明セル定理ニ背クコトノ起ルヲ示シ,其終結ガ眞ナルコトヲ證明スル方法ヲ**歸謬法**ト云フ。

系. 直線(AB)外ノ一點(C)ヲ過ギ此線ニ平行ナル直線アリ。

其故ハ先 C ヨリ AB ニ至ル垂線 AC アリ,次ニ C ヨリ AC ニ至ル垂線 CD アレバナリ(42, 41)。

53. 公理 VI. 一點ヲ通過シ一直線

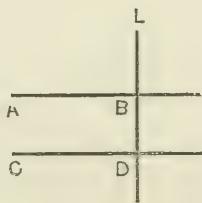
ニ平行ナル直線ハ唯一ニ限ル。

系一. <u>平行線ノ一ニ交ル直線ハ他ノ直線ニモ交ル。</u>

系二. <u>平行線ノ一ニ平行ナル直線ハ他ノ直線ニモ亦平行ナリ。</u>

54. 定理十二. 平行線ノ一(AB)ニ垂直ナル直線(LB)ハ他ノ直線(CD)ニモ亦垂直ナリ。

[證明] 先LBハCDニ交ルベシ,其故ハLBガ平行線ノ一ナルABニ交レバナリ。

LBトCDトノ交點ヲDトシ,DヨリLBニ垂線ヲ引ケバ此垂線ハABニ平行ナリ。然ルニDヲ過ギABニ平行ナル直線及LBト直角ヲナス直線ハ各唯一ナリ。故ニ

$$LB \perp CD.$$

注意. 本定理ヲ略述シテ平行線ハ共通垂線ヲ有ストモ云フ。

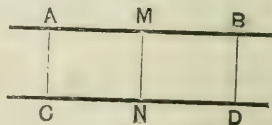
問 題

(1) 一點ヨリ平行線ニ引ケル二垂線ノ足ト此點トハ一直線上ニアリ。

(2) 定理十二ヲ用ヒテ前ノ定理十一ヲ證明セヨ。

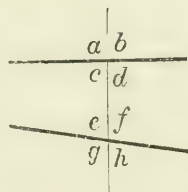
(3) 共通垂線ハ平行線ノ對稱ノ軸ナリ。

55. 定理十三. 平行線(AB, CD)ノ間ニアル共通垂線ノ部分(AC, BD)ハ相等シ。

[證明] 線分ABノ中點Mヲ通過スル共通垂線ヲMNトシ之ヲ折目トシテ圖形MACNヲ折返シ他ノ部分ノ上ニ重ヌレバM, Nニ於ケル角ハ皆直角ナル故ニMA, NCハ夫々MB, NDノ方向ヲ取ル又MAハMBニ等シキ故AハBニ合ス。而シテ一點ヨリ一直線ニ至ル垂線ハ唯一ニ限ル故ACハBDニ合ス。

∴ AC=BD。

注意。共通垂線ノ長サヲ平行線ノ**距離**ト云フ。

56. 定義. 二ツ以上ノ直線ニ交ル直線ヲ此等ノ直線ノ**割線**ト云フ。

二直線ト其割線トハ八角ヲナス。之ニ名クルコト次ノ如シ。

四角 a, b, g, h ヲ**外角**ト云ヒ, c, d, e, f ヲ**内角**ト云フ。c ト f ト或ハ d ト e トヲ**錯角**ト云フ。a ト e ト, b ト f ト, c ト g ト又ハ d ト h トヲ**同位角**ト云フ。

問　題

(1) 前ノ圖ニ於テ $a=100°, f=80°$ ナルトキ殘リノ六角ノ大サ如何。

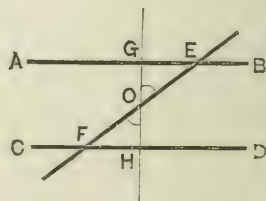
(2) 前ノ圖ニ於テ $c=120°, e=150°$ ナルトキ他ノ六角ノ大サ如何。

57. 定理十四. 平行線(AB, CD)ガ其ノ割線(EF)ト成セル錯角(AEF, EFD)ハ相等シ。

[證明] EFノ中點Oヲ通過スル共通垂線ヲGHトセヨ。

Oヲ周リテ圖形GOEヲ平角ダケ廻轉スルトキ, OE=OFナル故OEハOFニ合シ, EハFニ合シ∠EOG=FOHナル故OGハOHノ方向ヲ取ル。

又EGトFHトハ一點Fヨリ直線GHニ下セル垂線ト成ル故相合ス。

故ニ角OEGハOFHニ合ス。

卽∠AEF=EFD。

從テ他ノ一雙ノ錯角モ亦相等シ。

系. 平行線ガ其ノ割線ト成セル同位角ハ相等シク.割線ノ同側ニ在ル內角ノ和ハ二直角ニ等シ。

58. 定理十五. 二直線(AB, CD)ガ其割線(EF)ト成セル錯角(AEF, EFD)ガ相

等シキトキ,此等ノ二直線ハ平行ナリ。

[證明]　交點 F ヲ過ギ AB ニ平行ナル直線ヲ FD′ トセバ

$\angle EFD' = AEF$ (57)。

故ニ $\angle EFD' = EFD$。

然ルニ此二角ハ割線 EF ノ同側ニアリテ一邊ヲ共有ス。

故ニ FD′ ハ FD ニ合ス。

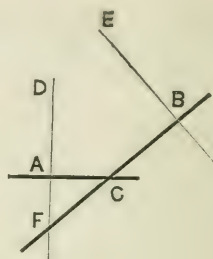
故ニ AB ト CD トハ平行ナリ。

系一.　二直線ガ其割線ト成セル同位角ガ相等シキカ,又ハ割線ノ同側ニアル內角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ此等ノ二直線ハ平行ナリ。

系二.　二直線ガ其割線ト同側ニ於テ成セル內角ノ和ガ二直角ニ等シカラザルトキハ,此等ノ二直線ハ二直角ヨリ小ナル和ヲ有スル方ニ於テ相交ル。

系三.　同一直線ノ垂線ト斜線トハ相交ル。

系四.　相交線(AC, BC)ニ垂直ナル二線(AD BE)ハ相交ル。

其故ハ $AC \perp BC$ ナルトキ $AD \parallel BC$, 故ニ AD ト BE トハ相交線ナリ。又 AC ガ BC ト斜交スルトキ BC ト AD トハ相交ル(系三)。而シテ其交點ヲ F トセバ $CA \perp AD$ ナル故 CF ハ AD ニ垂直ナラズ。故ニ AD ト BC トハ斜交シ BE ト BC トハ直交ス。故ニ AD ハ BE ト交ル(系三)。

59. 定義. 定理ノ假設ト終結トヲ交換シテ生ズル命題ヲ原定理ノ**逆**ト云フ。

例ヘバ定理十四ト定理十五トハ互ニ逆ナリ。

定理ノ假設ガ二ツ以上ノ部分ヨリ成ルトキハ其一部分ト終結トヲ交換シタル命題ヲ原定理ノ逆ト云フ。

問 題

(1) 定理二ト定理三ノ系トノ關係如何。

(2) 定理ノ逆ハ常ニ眞ナルカ,例ヲ擧ゲテ説明セヨ。(定理四ヲ用フベシ)。　(大豫)

(3) 定理十一ノ逆ヲ述ベヨ。

(4) 定理十二ノ逆ヲ述ベテ其中一ハ同一ノ定理ニ復歸スルコトヲ説明セヨ。

60. 定理十六. 相交線(X, Y)ガ夫々他ノ相交線(X′,Y′)ニ平行ナルトキ其夾角ハ相等シキカ又ハ互ニ補角ナリ。

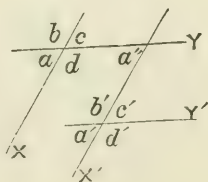
[證明] X∥X′ニシテ Y ハ X ニ交ル故又X′ニモ交ル。其一夾角ヲ a'' トセバ

$a=a''$。

同様ニ　$a'=a''$,

∴　$a=a'$。

∴　$a=c=a'=c'$,

$b=d=b'=d'$。

又 a ト b' トノ場合ノ如キハ其和ガ $a'+b'$ ニ等シキ故二直角ニ等シ。故ニ互ニ補角ナリ。

注意。 本定理ニ依レバ二角ノ邊ガ夫々平行ニシテ共ニ同方向ニ在ルカ又ハ共ニ反對ノ方

向ニ在ルトキニ此二角ハ相等シク,又一雙ノ邊ガ同方向ニアリテ他ノ一雙ノ邊ガ反對ノ方向ニアルトキニ互ニ補角ナリ。

問 題

(1) 角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ニ夫々垂直ナルトキ此二角ハ相等シキカ又ハ補角ナリ。(海機)

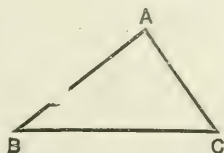
(2) 二角ノ二邊ガ夫々平行ナルトキ其二等分線ハ互ニ平行ナルカ又ハ垂直ナリ。

第 三 章

三 角 形

61. 定義. 線ニテ圍マレタル平面ノ一部分ヲ**平面形**ト云フ。

三角形トハ三ツノ線分ニテ成レル平面形ナリ。

例ヘバ三角形ABCノ如シ,之ヲ△ABCト記ス。線分BC,CA,ABヲ其**邊**ト云ヒ,其和ヲ**周圍**ト云フ。又三點A,B,Cヲ三角形ノ**頂點**ト云フ。

注意。三直線ハ一般ニ三點ヲ決定シ,三角形ヲ作ル。然レドモ三線皆平行ナルコトアリ,又皆一點ヲ過グルコトアリ,或ハ其中二線ガ平行ニシテ第三線之ニ交ルコトアリ。此等ノ場合ニハ三角形ヲ作ラズ。

62. 定義. 三角形ノ二邊ガ成ス角ヲ三角形ノ**内角**又ハ單ニ**角**ト云ヒ,一邊ト之ニ隣レル邊ノ延長トガ成ス角ヲ**外角**ト云フ。

三角形ノ三邊中一ヲ**底邊**或ハ**底**ト云ヒ,而シテ其兩端ニ於ケル角ヲ**底角**,底ニ對スル角ヲ**頂角**ト云フコトアリ。此際單ニ頂點ト云ハバ特ニ此底ニ對スル角ノ頂點ヲ指シ,又單ニ邊ト云ハバ底ニ

アラザル邊ヲ指ス。此頂點ヨリ底又ハ其延長ニ下セル垂線ノ長サヲ三角形ノ**高サ**ト云フ。

63. **定義.** 三邊ガ皆相等シキ三角形ヲ**等邊三角形**ト云フ。

二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**又ハ**等脚三角形**ト云ヒ,二等邊ノ夾角ヲ特ニ本形ノ頂角ト云ヒ,他ノ角ヲ底角ト云ヒ,第三邊ヲ底ト云フ。

64. **定義.** 直角ヲ一角トセル三角形ヲ**直角三角形**ト云ヒ,此直角ニ對スル邊ヲ斜邊ト云フ。

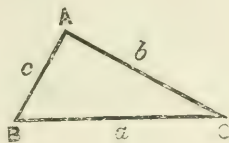
二ツノ鋭角ヲ單ニ角ト云ヒ,又單ニ邊ト云ヒテ斜邊ニアラザル二邊ノ一ヲ指スコトアリ。

問 題

(1) 直角三角形ノ斜邊ハ最大ナル邊ナリ。

(2) 三角形ノ三ツノ高サノ和ハ三邊ノ和ヨリ小ナリ。

65. 定理十七. 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ。

［證明］ △ABC ニ於テBCヲ最大邊ナリトスルモBC<BA+AC（公理I）。

系. 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ差ヨリ大ナリ。

66. 角 A, B, C ノ對邊ヲ夫々 a, b, c ニテ表ストキ　$a<b+c,\ b<c+a,\ c<a+b,$

或ハ　$a>b\sim c,\ b>c\sim a,\ c>a\sim b$。

故ニ或三線分ガ三角形ノ三邊タルコトヲ得ルニハ,其中任意ノ一ガ他ノ二線分ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大ナルヲ要ス。例ヘバ長サ 7 尺, 3 尺, 2 尺ナル三線分ヲ以テ三角形ヲ作ルコト能ハザルガ如シ。

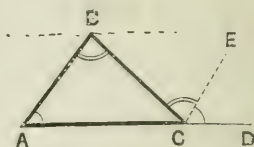
67. 定理十八. 三角形(ABC)ノ三角ノ和ハ二直角ニ等シ。

［證明］ 頂點Cヲ通過シ邊ABニ平行ナル線CE

ヲ引キ又邊ACヲDマデ延長セバ

$\angle BAC = ECD$ (57)。

$\angle ABC = BCE$ (57)。

$\angle ACB = ACB$。

$\therefore$　$\angle BAC + ABC + ACB =$ 平角ACD

$=2$直角。

系一.　三角形ノ外角ハ之ニ隣ラザル內角ノ和ニ等シ,從テ其何レヨリモ大ナリ。

系二.　三角形ハ一ツヨリ多ク直角又ハ鈍角ヲ有スルコトナシ。

系三.　直角三角形ノ二角ハ互ニ餘角ヲ爲ス。

系四.　二角ヲ等シクスル兩三角形ノ第三角ハ相等シ。

問　　題

(1)　三角形 ABC ニ於テ $A-B=B-C=30^\circ$ ナルトキ各角ノ大サ如何。

(2)　O ヲ $\triangle ABC$ 內ノ一點トセバ

$\angle BOC > BAC$。　（東工·陸幼）

(3) 同上ノ場合ニ於テ$\triangle$BOCノ周圍ハ$\triangle$ABCノ周圍ヨリ小ナリ。

(4) 同上ノ場合ニ於テ

$$a+b+c>\mathrm{AO}+\mathrm{BO}+\mathrm{CO}>\frac{1}{2}(a+b+c)。$$

三角形ノ合同

68. 二ツノ三角形ガ次ノ三部分ヲ等シクスルトキ他ノ三部分モ亦相等シク,兩形合同ナリ。

I. 二邊ト其夾角。

II. 二角ト其頂點ノ間ノ邊。

III. 三邊。

次ノ三定理ニ於テ順次ニ之ヲ證明セントス。此等ノ定理ハ極メテ重要ナルモノニシテ實ニ全編ノ基礎ナリ。

注意. 合同ナル二ツノ三角形ニ於テ等邊ト等角トハ必相對スルコトヲ忘ルベカラズ。

69. 三角形ノ如キ圖形ニアリテハ其形異ニシテ其大サ卽面積ノ相等シキモノアリ,此場合ニハ合同又ハ全等ナリト云フヲ得ザレドモ兩圖形

ハ相等シト云フ。合同又ハ全等ナルトキニハ相等シキコト明カナリ。

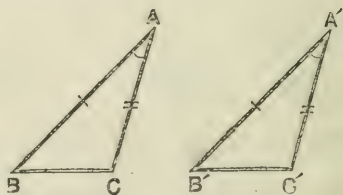
記號ニテ合同ナルコトヲ表スニハ≡ヲ以テシ，合同ナラザルモ相等シキコトヲ表スニハ＝ヲ以テス。線分又ハ角ノ如ク比較ノ方法單一ナルモノニ於テハ＝ヲ用フルヲ常トス。

70. 定理十九. 二邊ト其夾角トヲ等シクスル兩三角形ハ合同ナリ。

[假設]　$\triangle ABC, A'B'C'$ ニ於テ

$AB=A'B', AC=A'C', \angle A=A'$。

[終結]　$\triangle ABC \equiv A'B'C'$

[證明]　$\triangle ABC$ ヲ取リ，AB ヲ之ニ等シキ $A'B'$ ノ上ニ置キ，角 A ヲ角 A' ノ上ニ置クトキ此二角ハ相等シキ故 AC ハ $A'C'$ ノ方向ヲ取リ，$AC=A'C'$ ナル故 C ハ C' ニ合ス。故ニ BC ハ $B'C'$ ニ合シ，兩三角形ハ全ク相合ス。

71. 定義. 三角形ノ頂點ト其對邊ノ中點トヲ連ヌル線分ヲ本形ノ**中線**ト云フ。

問　題

(1) 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線上ノ各點ハ底ノ兩端ヨリ等距離ニアリ。　(海兵)

(2) 等脚三角形ノ二ツノ中線ハ相等シ。

(3) 三角形 ABC ノ二ツノ中線 BE, CF ヲ夫夫 M, N マデ延長シ EM=BE, FN=CF トセバ三點 M, A, N ハ同一ノ直線上ニ在リ。

(4) 三角形ノ頂點ヨリ底邊ニ至ル中線ノ二倍ハ二邊ノ和ヨリ小ニシテ,其和ト底邊トノ差ヨリ大ナリ。

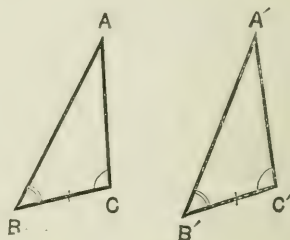
(5) 三角形ノ三ツノ中線ノ和ハ三邊ノ和ヨリ小ニシテ,其和ノ半ヨリ大ナリ。　(海兵・商船)

72. 定理二十. 二角及其頂點ノ間ノ邊ヲ等シクスル兩三角形ハ合同ナリ。

[假設] $\triangle ABC, A'B'C'$ ニ於テ

$\angle B = B', \angle C = C', BC = B'C'$。

[終結] $\triangle ABC \equiv A'B'C'$。

[證明] $\triangle ABC$ ヲ取リ,邊 BC ヲ B'C' ノ上ニ重ネ,B ヲ B' ノ上ニ,C ヲ C' ノ上ニ重ヌルトキ,角 B, C ハ

夫々角 B′,C′ ニ等シキ故,邊 BA, CA ハ夫々 B′A′ C′A′ ノ方向ヲ取リ,從テ A ハ A′ ノ上ニ合シ,兩三角形ハ全ク相合ス。

系. <u>二角及其一對邊ヲ等シクスル兩三角形ハ合同ナリ</u>。

問 題

(1) 三角形ノ頂角ノ二等分線ガ底ニ垂直ナルトキ此三角形ハ等脚三角形ナリ。

(2) 角ノ二等分線中ノ點ハ二邊ヨリ等距離ニ在リ。

(3) 一鋭角及其隣邊又ハ一鋭角及其對邊ヲ等シクスル二ツノ直角三角形ハ合同ナリ。(商船)

(4) 等脚三角形ノ底ノ兩端ヨリ對邊ヘ下セル垂線ハ相等シ。

73. 定理二十一. 三邊ヲ等シクスル兩三角形ハ合同ナリ。

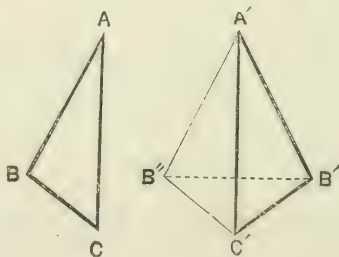
[假設] $\triangle ABC$, $A'B'C'$ ニ於テ

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$。

[終結] $\triangle ABC \equiv A'B'C'$。

[證明] $\triangle ABC$ ヲ取リ等邊 AC, $A'C'$ ヲ重ネ,之ヲ $\triangle A'B''C'$ ノ位置ニ置クトキ A' 及 C' ハ二點 B', B'' ヨリ等距離ニ在ルヲ以テ $A'C'$ ハ $B'B''$ ノ垂直二等分線ナリ。

故ニ B' 及 B'' ハ軸 $A'C'$ ニ關シテ對稱ニシテ,$A'C'$ ヲ折目トシテ $\triangle A'B''C'$ ヲ折返セバ B'' ハ B' ニ合ス。

故ニ $\triangle A'B''C'$ ト $A'B'C'$ ハ全ク相合ス。

$\therefore\ \triangle A'B'C' \equiv A'B''C',\quad \therefore\ \triangle ABC \equiv A'B'C'$。

問　題

(1) 等脚三角形ノ底ニ至ル中線ハ底ニ直交ス。

(2) 一邊ヲ等シクスル二個ノ等邊三角形ハ合同ナリ。

74. 定理二十二. 三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク,其夾角ガ不等ナルトキ,大角ヲ有スル三角形ノ第三邊ハ他ノ三角形ノ第三邊ヨリ大ナリ。

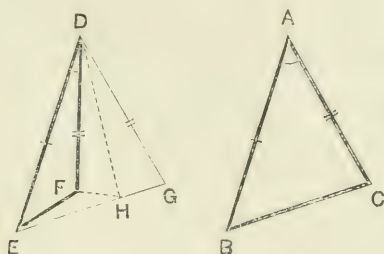
[假設] $\triangle ABC, DEF$ ニ於テ

$AB = DE,\ AC = DF,\ \angle BAC > EDF$。

[終結] $BC > EF$。

[證明] $\triangle ABC$ ヲ取リ AB ヲ DE ニ重ネ之ヲ $\triangle DEG$ ノ位置ニ置キ,角 FDG ノ二等分線 DH ヲ引クトキ此線ハ角 EDG ノ內ニアル故 EG ト或點 H ニ於テ交ル。次ニ FH ヲ連ヌルトキ $\triangle DHF$ 及

DHG ハ二邊ト夾角トヲ等シクスルヲ以テ合同ナリ。故ニ $FH = HG$。

然ルニ

$$FH + HE > EF,$$

$$\therefore \quad GH + HE > EF,$$

$$\therefore \quad GE > EF, \quad \therefore \quad BC > EF.$$

75. 定理二十三. 三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク,第三邊ガ不等ナルトキ,大ナル第三邊ヲ有スル三角形ノ此邊ニ對スル角ハ他ノ三角形ノ之ニ相應スル角ヨリ大ナリ。

[假設] $\triangle ABC$, DEF ニ於テ,

$$AB = DE, \; AC = DF, \; BC > EF.$$

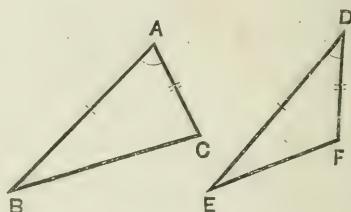
[終結] $\angle BAC > EDF$.

[證明]

$\angle A = D$,

$\angle A < D$,

$\angle A > D$

ノ中一ハ必眞ナリ。然ルニ

$\angle A = D$ トセバ $BC = EF$ ヲ得テ假設ニ戻リ

又 $\angle A < D$ トセバ $BC < EF$ ヲ得テ假設ニ戻ル

故ニ $\angle A$ ハ D ニ等シカラズ又 $\angle A$ ハ D ヨリ小ナラズ。故ニ $\angle A > D$ ナルノ外ナシ。

76. 上ノ證明法ハ**轉換法**又ハ**間接法**ト稱スルモノニシテ定理ノ逆ノ證明ニ於テ屢用ヒラル此法ニテハ證明セントスル定理ノ終結ト異ナレル終結ハ悉ク假設ニ戻ルコトヲ示シ,以テ本題ノ終結ノミガ眞ナルコトヲ證スルナリ。

之ヲ一般ノ法則トシテ述ブレバ

或定理ニ於テ其假設ガ或事項ニ就テ起リ得ベキ總テノ場合ヲ盡シ,其終結ハ互ニ相容レザルモノナルトキ定理ノ逆モ亦必眞ナリ。

之ヲ**轉換ノ法則**ト云フ。

問　題

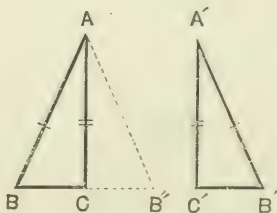
(1) 等脚三角形ノ頂角ノ二等分線中ニ在ラザル形内ノ點ハ底ノ兩端ヨリ不等距離ニ在リ。

(2) $\triangle ABC$ ノ底 BC ノ中點ヲ M トセバ
$AB \gtreqless AC$ ナルニ從ツテ $\angle AMB \gtreqless 90°$ ナリ。

(3) 前題ノ逆ヲ述ベ且之ヲ證明セヨ。

77. 定理二十四. 斜邊及一銳角ヲ等シクスル二ツノ直角三角形ハ合同ナリ。

78. 定理二十五. 斜邊及一邊ヲ等シクスル二ツノ直角三角形ハ合同ナリ。

[假設] 直角三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ
$AB = A'B'$,
$AC = A'C'$。

[終結] $\triangle ABC \equiv A'B'C'$.

[證明] $\triangle A'B'C'$ ヲ取リ $A'C'$ ヲ AC ニ重ネ之ヲ

$\triangle AB''C$ ノ位置ニ置クトキ BCB'' ハ一直線ヲナス。而シテ AB, AB'' ハ一點 A ヨリ一直線ニ至ル相等シキ斜線ナリ。故ニ $CB=CB''$ (50系一)。而シテ $\triangle ABC$ ト $\triangle AB''C$ トハ三邊ヲ等シクス。

$\therefore\ \triangle ABC \equiv AB''C$。 $\therefore\ \triangle ABC \equiv A'B'C'$。

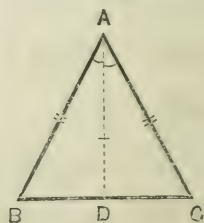
問　題

(1) 等脚三角形ノ頂點ヨリ底ニ下セル垂線ハ頂角及底ヲ二等分ス。

(2) 角ノ二邊ヨリ等距離ニ在ル其內ノ點ハ皆此角ノ二等分線中ニ在リ。

(3) 三角形ノ三內角ノ二等分線ハ同一點(之ヲ三角形ノ**內心**ト云フ)ヲ通過ス。

(4) 三角形ノ一角ト他ノ二外角トノ二等分線モ亦同一點(之ヲ三角形ノ**傍心**ト云フ)ヲ通過ス。

79. 定理二十六. 等脚三角形 (ABC) ノ兩底角 (B, C) ハ相等シ。

[證明]　頂角 A ノ二等分線

ヲ AD トスレバ

$$\triangle ABD \equiv ACD. \quad \therefore \angle B = C.$$

系一. 等邊三角形ノ角ハ皆 60° ナリ。

系二. 等脚三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ直角ニ二等分ス。

80. 定理二十七. 三角形ノ二角ガ相等シキトキハ其對邊モ亦相等シ。

系. 三角形ノ三角ガ相等シキトキ三邊モ亦相等シ。

問　題

(1) 等脚三角形ノ外頂角(頂角ニ隣レル外角)ノ二等分線ハ底ニ平行ナリ。　(東商)

又逆ヲ證明セヨ。　(海兵)

(2) 等脚三角形ノ一角ガ 60° ナルモノハ等邊三角形ナリ。

(3) 等脚三角形ノ兩底角ノ二等分線ハ底ト共ニ第二ノ等脚三角形ヲ作ル。外底角(底角ニ隣レル外角)ノ場合ハ如何。

(4) 等脚三角形ノ兩底角ノ二等分線ガ對邊ニテ終ルトキ其長サハ相等シ。外底角ノ場合ハ如何。

(5) 三角形 ABC ニ於テ邊 CB 中ニ D 點ヲ取リ CD ヲ邊 CA ニ等シクセバ角 DAB ハ兩底角 A, B ノ差ノ半ニ等シ。　　(商船)

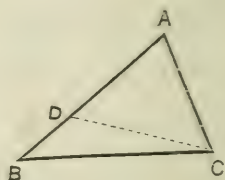
81. 定理二十八. 三角形ノ二邊ガ不等ナルトキ大邊ノ對角ハ小邊ノ對角ヨリ大ナリ。

[假設] △ABC ニ於テ AB > AC.

[終結] ∠ACB > ABC.

[證明] AB > AC ナル故 AB 中ニ AC ニ等シキ AD ヲ取リ, CD ヲ引クトキ

∠CDA = DCA.

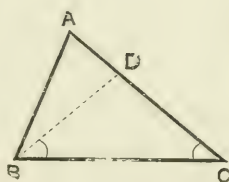
然ルニ ∠CDA ハ △BCD ノ外角ナル故 ∠B ヨリ大ナリ。然ルニ

∠ACB > ACD.

∴ ∠ACB > ABC.

82. 定理二十九. 三角形ノ二角ガ不等ナルトキ大角ノ對邊ハ小角ノ對邊ヨリ大ナリ。

[假設]　△ABC ニ於テ ∠ABC ＞ ACB。

[終結]　AC ＞ AB。

[證明]　∠ABC ＞ ACBナル故∠ABC ニ ∠C ニ等シキ∠CBD ヲ作リ BD ヲ引ケバ A ト C トノ間ニ於テ AC ニ交ル。

倍　AD + DB ＞ AB.

然ルニ　DB ＝ DC.

∴　AD + DC ＞ AB.

∴　AC ＞ AB.

問　題

(1)　三角形ノ一角ガ鈍角ナルトキ其對邊ハ最大ナル邊ナリ。

又其逆ハ眞ナリヤ。

(2) 三角形ノ二邊ガ不等ナルトキ,其交點ヨリ出ヅル中線ガ大邊ト爲ス角ハ小邊ト爲ス角ヨリ小ナリ。 (商船·陸士)

(3) 三角形ノ頂點ヨリ底邊上ノ任意ノ點ニ至ル直線ハ二邊ノ中ノ大ナルモノヨリ小ナリ。

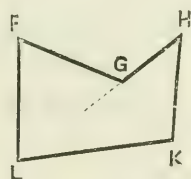
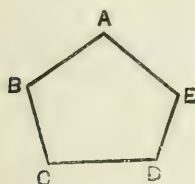
(4) 二邊ヲ等シクシ且其一雙ノ等邊ニ對スル角ヲ等シクスル兩三角形ニ於テ,其他ノ一雙ノ等邊ニ對スル角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ。若相等シキトキハ兩三角形ハ合同ナリ。

第四章

多角形

83. 定義. **多角形**トハ連接セル數多ノ線分ニテ成レル平面形ナリ。其各線分ヲ多角形ノ**邊**ト云ヒ,其和ヲ**周圍**ト云フ。各邊ノ端ヲ頂點ト云フ。

三角形ハ多角形ノ中,最簡單ナルモノナリ。

84. 定義. **凸多角形**トハ其何レノ邊ヲ延長スルモ形內ニ入ラザル多角形ナリ。 例ヘバ ABCDE ノ如シ。

凹多角形トハ其何レカ一邊ヲ延長スルトキ形內ニ入ル多角形ナリ。 例ヘバ FGHKL ノ如シ。

注意。 爾後單ニ多角形ト云ヘバ常ニ凸多角形ナリト知ルベシ。

85. 定義. 多角形ノ二隣邊ノ間ノ形內ニ向ヘル角ヲ其**內角**又ハ單ニ**角**ト云ヒ,其一邊ト其隣邊ノ延長トノ間ノ角ヲ其**外角**ト云フ。

凸多角形ノ內角ハ皆平角ヨリ小ニシテ其外角

ハ皆形外ニアリ。然レドモ凹多角形ニ於テハ内角ノ中,平角ヨリ大ナルモノ必少クトモ一アリ,從テ其頂點ニ於ケル外角ハ形内ニ在リ。

86. **定義**. 邊數ガ3, 4, 5等ナル多角形ヲ**三邊形**,**四邊形**,**五邊形**等ト云ヒ,或ハ**三角形**,**四角形**,**五角形**等トモ云フ。

87. **定義**. **正多角形**トハ等邊ニシテ等角ナル多角形ナリ。

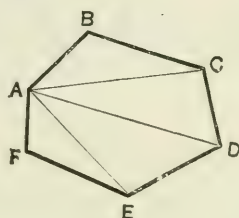
注意。等邊三角形又ハ等角三角形ハ正三角形ナレドモ,等邊ニシテ等角ナラズ又等角ニシテ等邊ナラザル多角形アリ。

88. **定義**. 多角形ノ**對角線**トハ相隣ラザル頂點ヲ連ヌル直線ナリ。

89. **定理三十**. 多角形ノ内角ノ和ハ邊數ノ二倍ヨリ四ヲ減ジタル數ニテ直角ヲ倍セルモノニ等シ。

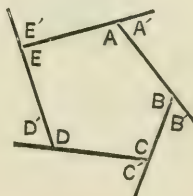
[假設]　ABC……F ヲ n 邊ノ多角形トス。

[終結]　∠A＋B＋C＋……＋F＝(2n−4) 直角.

[證明]　一頂點Aヨリ對角線AC, AD等ヲ引クトキハ此等ノ n−3個ノ對角線ハ本形ヲ n−2個ノ三角形ニ分ツベシ,其故ハ AB, AF ヲ除キ其他ノ邊ハ皆此等ノ三角形ノ底トナレバナリ。

故ニ∠A＋B＋C＋……＋F ハ此等ノ三角形ノ內角ノ和2(n−2)直角卽(2n−4)直角ニ等シ。

系.　四角形ノ四角ノ和ハ四直角ニ等シ。

90.　定理三十一.　多角形ノ總テノ邊ヲ順次延長シテ作レル外角ノ和ハ四直角ニ等シ。

[證明]　A, B, C,……ヲ n 邊ノ多角形ノ內角トシ, A′, B′, C′,……ヲ之ニ隣レル外角トスレバ內角及外

角ノ總和ハ $2n$ 直角ニシテ內角ノ和ハ $(2n-4)$ 直角ナリ。故ニ外角ノ和ハ $\{2n-(2n-4)\}$ 直角卽四直角ニ等シ。

系. 凸多角形ノ內角ハ四ツ以上銳角ナラズ

問　　題

(1) n 邊ノ正多角形ノ一角ハ $(2-\frac{4}{n})$ 直角ニ等シ。

(2) 正八角形,正十角形及正十二角形ノ各角ノ大サハ各幾度ナルカ。

(3) 多角形ノ內角ノ和ガ十六直角ニ等シキモノアリ,其邊數ヲ求メヨ。

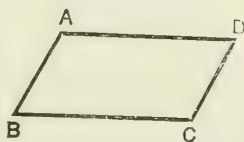
(4) 正多角形ノ一角ガ $162°(\frac{9}{5}$ 直角$)$ ナルトキノ邊數如何。　　　(商船)

(5) 正多角形ノ一ツノ外角ガ $20°(\frac{2}{9}$ 直角$)$ ナルトキノ邊數如何。

(6) 五邊形ノ對角線ノ數ヲ求メ,推シテ n 邊形ノ對角線ノ數ノ公式ヲ作レ。　　　(商船)

第五章

平行四邊形

91. 定義. 平行四邊形トハ二組ノ對邊ガ互ニ平行ナル四邊形ナリ。

例ヘバ ABCD ノ如シ。

之ヲ ▱AC 又ハ ▱BD ト略記スルコトアリ。

梯形トハ一組ノ對邊ノミガ平行ナル四邊形ナリ。

平行ナル二邊ヲ梯形ノ底ト云ヒ,一ヲ**上底**ト云ヒ,他ヲ**下底**ト云フ。又下底ノ兩端ニ於ケル内角ヲ**底角**ト云フ。平行ナラザル二邊ガ相等シキモノヲ**等脚梯形**又ハ**二等邊梯形**ト云フ.

92. 定義. 矩形トハ其角ガ皆直角ナル四邊形ナリ。

正方形トハ其角ガ皆直角ニシテ邊ガ皆相等シキ四邊形ナリ。

菱形トハ其邊ガ皆相等シキ四邊形ナリ。

故ニ正方形モ亦菱形ナリ。

93. 定義. 二點 P, P′ ハ之ヲ連ヌル直線ノ中點 O ニ關シテ**對稱**ナリト云ヒ, O ヲ對稱ノ**中心**ト云フ。

平面圖形ガ一點ニ關シテ對稱ナリトハ其圖形上ニアル各對ノ點ガ總テ其點ニ關シテ對稱ナルヲ云フ。

故ニ點ニ關シテ對稱ナル圖形ハ之ヲ周リテ平角ダケ廻轉スルトキ其何レノ部分タリトモ或他ノ部分ニ合セシムルコトヲ得ベシ。

94. 定理三十二. 平行四邊形ニ於テハ[1]對邊ハ相等シク，[2]對角ハ相等シク，[3]對角線ハ互ニ二等分ス。

系一. 四邊形ハ次ノ場合ニ於テ平行四邊形ナリ，[1]二組ノ對邊ガ夫々相等シキトキ，[2]二組ノ對角ガ夫々相等シキトキ，[3]對角線ガ互ニ二等分スルトキ，[4]一組ノ對邊ガ相等シクシテ平行ナルトキ。

系二. 矩形,菱形,正方形ハ皆平行四邊形ナリ。

系三. 平行四邊形ノ各對角線ハ之ヲ合同ナル兩三角形ニ分ツ。

問　題

(1) 二隣邊及一角ヲ等シクスル二ツノ平行四邊形ハ合同ナリ。

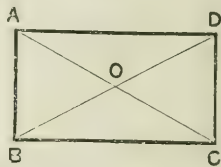
(2) 平行四邊形ノ一角ガ直角ナルモノハ矩形ナリ。

(3) 菱形ノ各對角線ハ他ノ對角線ノ垂直二等分線ニシテ且各角ヲ二等分ス。

(4) 等脚梯形ノ兩底角ハ相等シク對角ハ補角ヲ爲ス。 (海兵)

(5) 平行四邊形ハ對角線ノ交點ニ關シテ對稱ナリ。 (海兵)

95. 定理三十三. 矩形ノ對角線(AC, BD)ハ相等シ。

[證明] △ABC ノ二邊 AB, BC ト其夾角 ABC ハ △DCB ノ二邊 DC, CB ト其夾角 DCB ニ等シ,故ニ兩形合同ニシテ AC = BD。

系一. 對角線ガ相等シキ平行四邊形ハ矩形ナリ。

系二. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點ヨリ等距離ニ在リ。

問　　題

(1) 三角形ノ頂角ハ其頂點ヨリ底ニ至ル中線ガ底ノ半ニ對シテ大ナルカ,等シキカ,小ナルカニ從テ銳角,直角,鈍角ナリ。　(海機)

(2) 直角三角形ニ於テ一銳角ガ他ノ銳角ノ二倍ナルトキ最小邊ハ斜邊ノ半ニ等シ。　(商船)

又此逆ヲ證セヨ。

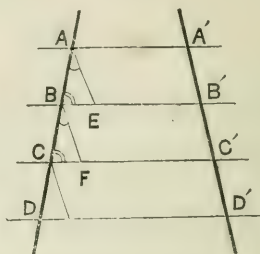
(3) 矩形ノ角ノ二等分線ハ一ノ正方形ヲ作ル。

(商船)

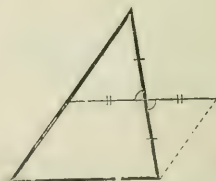
(4) 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通過シ,互ニ直角ニ交ル二直線ヲ引キ各邊トノ交點ヲ順次ニ連ヌルトキ,新ニ生ズル四邊形ハ菱形ナリ。

(5) 平行四邊形ハ常ニ對稱ノ軸ヲ有スルカ。矩形ハ如何。

96.　定理三十四.　數多ノ平行線(AA′, BB′,......)ガ之ニ交ル二直線中ノ一(AD)ヲ若干等分スルトキハ又他ノ線(A′D′)ヲモ同數ニ等分ス。

[證明] 分點 A, B, 等ヨリ A′D′ ニ平行ナル線 AE, BF, 等ヲ引キ E, F, 等ニ於テ所題ノ平行線ニ會セシムレバ三角形 ABE, BCF, 等ハ明ニ二角ト其間ノ邊トヲ等シクスル故合同ナリ,故ニ AE, BF, 等ハ皆相等シ。而シテ此等ノ線分ハ平行四邊形ノ對邊 A′B′, B′C′, 等ニ等シ。故ニ

$$A'B'=B'C'=\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

系一. 三角形ノ一邊ノ中點ヨリ底ニ平行ニ引ケル直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ通過ス。

系二. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ連ヌル直線ハ底ニ平行ニシテ其半ニ等シ。

本定理ヲ用ヒズ附圖ニ依リテ直接證明ヲ試ミルベシ。

系三. 梯形ノ平行ナラザル二邊ノ中點ヲ連ヌル直線ハ底ニ平行ニシテ兩底ノ和ノ半ニ等シ

問題

(1) 三角形ノ三邊ノ中點ヲ連ヌル線ハ之ヲ四個ノ合同ナル三角形ニ分ツ。

(2) 四邊形ノ四邊ノ中點ヲ順次ニ連ヌル直線ハ平行四邊形ヲ爲シ,其周圍ハ兩對角線ノ和ニ等シ。 (海兵·神商)

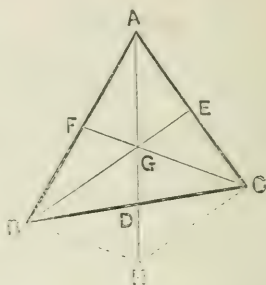
(3) 四邊形ノ對邊ノ中點ト兩對角線ノ中點トヲ連ヌル直線ハ平行四邊形ヲ爲ス。(東工·東師)

(4) 平行四邊形ノ對角頂ヨリ對邊ノ中點ニ引ケル直線ハ一ツノ對角線ヲ三等分ス。

(東工·海兵·農實)

(5) 一直線ノ兩端及中點ヨリ他ノ直線ヘ平行線ヲ引クトキハ中間ノモノガ他ノ二線ノ和半又ハ差半ニ等シ。

97. 定理三十五. 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ヲ通過ス,而シテ此交點ヨリ頂點ニ至ル距離ハ其中線ノ三分ノ二ナリ。

[證明] △ABC ニ於テ二中線 BE, CF ノ交點ヲ G トシ, AG ノ延長ガ BC ヲ二等分スルコトヲ證明スベシ。

B ヲ過ギ FG ニ平行ナル直線BH ヲ引キ, AG ノ延長ト H ニ於テ交ラシムレバ G ハ AH ノ中點ナリ。 故ニ GE 卽 BG∥CH。故ニ BGCH ハ平行四邊形ニシテ GH ハ BC ヲ D ニ於テ二等分ス。故ニ AG ノ延長ハ BC ノ中點 D ヲ通過ス。

而シテ $FG=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}GC$ ナル故 $CG=\frac{2}{3}CF$ 等ナリ。

注意。 G點ヲ △ABC ノ**重心**ト云ヒ,力學ニ於テ緊要ナル性質ヲ有スルモノナリ。

98. 定理三十六. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ヲ通過ス,而シテ其點ハ三項點ヨリ等距離ニ在リ。

[證明] ABC ヲ三角形トシ D, E, F ヲ夫々三

邊 BC, CA, AB ノ中點トス。

D, E ヲ通過スル二垂線ハ相交ル。其交點ヲOトセバ

BO=CO, CO=AO。

故ニ AO=BO。

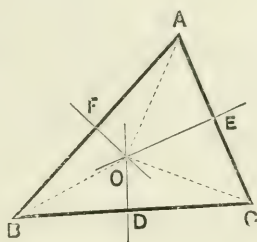
故ニOハ AB ノ垂直二等分線中ニアリ(47系一)。

故ニ D, E, F ヲ通過スル三垂線ハ同一ノ點Oヲ通過シ,且其點Oハ A, B, C ヨリ等距離ニ在リ。

注意。 O點ヲ△ABCノ外心ト云フ。

系. 三角形ノ頂點ヨリ對邊ヘ下セル三垂線ハ同一ノ點ヲ通過ス。

其故ハ三角形ヲ DEF トセバ其三垂線ハ其頂點ヲ過ギ對邊ニ平行ナル線ヲ引キテ生ズル三角形 ABC ノ三邊ノ垂直二等分線ニ相當スレバナリ。

注意。 三角形ノ頂點ヨリ對邊ニ至ル垂線ヲ單ニ三角形ノ垂線ト云ヒ,其交點ヲ垂心ト云フ.

問　題

(1) 等脚三角形ノ底邊中ノ任意ノ一點ヨリ等邊ニ至ル二垂線ノ和ハ一定不易ナリ。(商船·大工)

點ガ底ノ延長ノ上ニ在レバ如何。

(2) 正三角形ノ形內ノ任意ノ一點ヨリ三邊ニ至ル三垂線ノ和ハ一定不易ナリ。(陸士·千醫)

點ガ形外ニアル場合ヲ吟味セヨ。

第一篇雜題

(1) 正三角形ノ各邊上ニ其端ヨリ順次ニ等シキ距離ニ一ツ宛三ツノ點ヲ取レバ此三點ヲ結ブ直線ハ一ノ正三角形ヲ成ス。(大豫)

(2) 四邊形ABCDノ邊ADハ最大ニシテ邊BCハ最小ナリ,然ラバ角ABCハ角ADCヨリ大ニシテ角BCDハ角BADヨリ大ナリ。(海兵)

(3) 三角形ABCニ於テAB＞ACトシ角Aノ二等分線ヲBCトDニ於テ會セシムルトキハBD＞CDナリ。

(4) 平行四邊形ニ於テ鈍角ニ對スル對角線ハ銳角ニ對スル對角線ヨリ大ナリ。

(5) 四邊形ABCDニ於テ邊ABハ邊CDニ等シク角ABCハ角BCDニ等シ,然ルトキハ此四邊形ハ梯形ナリ。 (海機)

(6) 直線MNノ同ジ側ニ在ル二點A,Bヨリ此線中ノ點Cニ至ル距離ノ和ガ最小ナルハ$\angle ACM = BCN$ナルトキナリ。

(7) 三角形ABCノ三邊BC, CA, ABノ中點ヲ夫々D, E, FトシE, Fヨリ三角形外ニ夫々AC, ABノ垂線EG, FHヲ引キ之ヲ夫々AC, ABノ半分ニ等シカラシムルトキハ三角形DEG, DFHハ全ク相等シク且角GDHハ直角ナリ。 (商船)

(8) 頂角ヲ共有スル二ツノ三角形ABC, ADEアリテ$AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$ナルトキハ三角形ADEノ底邊DEハ三角形ABCノ底邊BCヲ二等分ス。 (海機)

(9) 三角形ABCニ於テ底角Bガ他ノ底角Cノ二倍ナルトキハ底邊ノ中點ト高サノ足トノ距離ハ邊ABノ半分ナリ。 (海機)

(10) 三角形ノ三ツノ中線ガ相等シキトキハ其三角形ハ正三角形ナリ。 (大 豫)

(11) 三角形 ABC ノ邊 AB ハ AC ヨリ長シ,然ルトキハ角 BAC ノ外角ノ二等分線ハ必邊 BC ノ延長ニ交ルベシ。問フ其交點ハ BC ヲ B ノ方又ハ C ノ方ニ延長シタル方ニアルカ,之ヲ決定シ其理ヲ述ベヨ。 (海 機)

(12) A ヲ直角トセル三角形 ABC ノ B 角ノ二等分線ト AC 邊トノ交點ヲ D トシ又 A ヨリ斜邊 BC ヘ引キタル垂線ト BD トノ交點ヲ E トセバ AD = AE ナリ。 (商 船)

(13) 三角形ノ二ツノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル二ツノ直線ハ互ニ二等分スルコトナシ。

(14) 三角形 ABC ノ邊 AB ノ中點ヲ D トス,邊 AC ノ上ニ AE ヲ AC ノ三分ノ二ニ取リ CD, BE ノ交點ヲ O トセバ OE ハ BE ノ四分ノ一ナルコトヲ證セヨ。 (海 兵)

第二篇

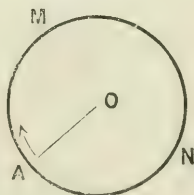
圓

第一章

圓ノ基本性質

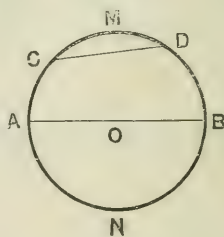
99. 定義. **圓**トハ一ノ曲線ニヨリテ圍マレタル平面形ニシテ,其曲線上ノ總テノ點ハ内部ノ一定點ヨリ等距離ニ在リ。

其曲線ヲ**圓周**ト云ヒ,圓周ノ一部分ヲ**弧**ト云フ。又其定點ヲ**中心**ト云ヒ,中心ヨリ圓周へ引ケル線分ヲ圓ノ**半徑**ト云フ。

M
O
A
N

故ニ有限直線OAノ一端Oヲ固定シ,之ヲ平面上ニ回轉シ原位置ニ復歸セシムレバ他ノ端Aハ閉ヂタル曲線AMNヲ畫ク,是レ卽圓周ニシテ直線OAガ半徑ニシテ,其一端Oガ中心ナリ。

此圓ヲ圓O又ハ圓AMNト呼ブ。

注意. 時トシテハ單ニ圓ト云フモ圓周ノコトヲ指スコトアリ。

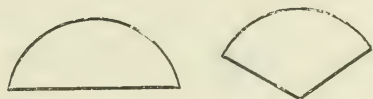
合セテ全圓周ヲ成ス二ツノ弧ヲ**共軛弧**ト云ヒ,大ナル方ヲ**優弧**ト云ヒ,小ナル方ヲ**劣弧**ト云フ。

例ヘバCMDトCNDトノ如シ。

注意. 通常單ニ弧ト云ハバ劣弧ヲ指スモノト知ルベシ。

100. 定義. **弦**トハ弧ノ兩端ヲ連ヌル線分ニシテ其中心ヲ通過スルモノ

ヲ特ニ**直徑**ト云フ。　例ヘバ弦CD, 直徑AOBノ如シ。

直徑ハ皆半徑ノ二倍ナル故相等シ。

101. 定義. **弓形**トハ弧ト弦トニテ圍メル平面形ニシテ,**扇形**トハ弧ト半徑トニテ圍メル平面形ナリ。

102. 定理一. 一點ト圓ノ中心トノ距離ハ此點ガ圓內ニ在ルト圓外ニ在ルト又圓周上ニアルトニ從テ半徑ヨリ小ナルカ大ナルカ又ハ之ニ等シ。

系一. 中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ大ナル點ハ圓外ニ在リ,半徑ニ等シキ點ハ圓周上ニ在リ,半徑ヨリ小ナル點ハ圓內ニ在リ。　(轉換法)

系二. 弦上ノ總テノ點ハ兩端ヲ除クノ外皆圓內ニアリ。

問　　題

(1) 矩形ノ四頂點ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

(2) 斜邊ヲ共有スル總テノ直角三角形ノ頂點ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

(3) 菱形ノ四邊ノ中點ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

103. 定理二. 相等シキ半徑ノ兩圓ハ合同ナリ。

[證明] 兩圓中,其一ヲ取リ其中心ヲ他ノ圓ノ中心上ニ落ツル樣ニ之ヲ重又ルトキハ,前者ノ圓周上ノ各點ハ後者ノ圓周上ニ在リ,逆ニ後者ノ圓周上ノ各點ハ前者ノ圓周上ニ在ルベシ,其故ハ半徑相等シケレバナリ(102系一),卽兩圓ハ合同ナリ。

系一. 圓ノ中心ヲ固定シ此圓ヲ自己ノ平面上ニ回轉スルトキ,其各位置ハ常ニ原圓ニ合ス。

系二. 直徑ヲ共有スル兩圓周ハ相合ス。

問　　題

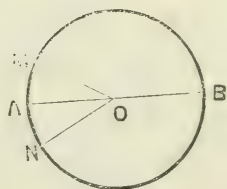
(1) 圓ノ中心ハ唯一ナリ。

(2) 大半徑ノ圓ハ小半徑ノ圓ヨリ大ナリ。

(3) 合同ナル二圓ノ半徑ハ相等シ、(歸謬法)

注意. 合同ナル二圓ヲ等圓ト云フ。

104. 定理三. 直徑ハ圓及圓周ヲ二等分ス。

[證明] 直徑ABニテ分タレタル圓周ノ一部分ノ上ナル任意ノ點ヲMトシ,半徑OMヲ引キ,角AOMニ等シキ角ヲ其反對ノ側ニABト作リテ半徑ONヲ引ケ。然ル後ABヲ折目トシ弓形AMBヲ折返セバ角AOMハ角AONト合ス。而シテOM=ONナル故M點ハN點ニ合ス。同様ニABヲ折目トシ弓形ANBヲ折返セバANB上ノ任意ノ點ハAMB上ノ或點ニ合ス。故ニAMBノ弧及弓形トANBノ弧及弓形トハ相合ス,即合同ナリ。

系. 互ニ垂直ナル二ツノ直徑ハ圓及圓周ヲ四等分ス。

105. 定義. 直徑ニテ分タレタル圓ノ各部分ヲ**半圓**ト云ヒ,垂直ナル二直徑ニテ分タレタル圓ノ各部分ヲ**四分圓**又ハ**象限**ト云フ。

問　　題

(1) 圓ハ直徑又ハ中心ニ關シテ對稱ナリ。

(2) 圓內ノ一點ヨリ其點ヲ過グル直徑ト等角ヲナス直線ヲ出ストキハ其線分ハ相等シ。

(3) 一定點ヲ過グル總テノ直線ニ關シテ對稱ナル平面形ハ圓ナリ。

106. 定理四. 一點ヨリ圓周ニ至ル線分ノ中,中心線上ニアルモノガ最短線分及最長線分ナリ。

[假設] P ヲ圓外ノ點トシ PAA′ ヲ中心 O ヲ過グル直線トシ PBB′ ヲ他ノ線トス。

[終結] $PA < PB$ 又 $PA' > PB'$。

[證明] I. $PO < PB + BO$。

又　$AO = BO$。

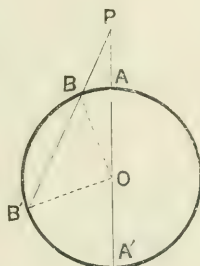
邊々相減ズレバ

$$PA < PB.$$

II. $PO > PB' - OB'$.

又　$OA' = OB'$.

邊々相加フレバ

$$PA' > PB'.$$

Pガ圓內又ハ圓周上ニ在ルトキモ同様ニ證明スルコトヲ得。

107. 定義.　點ト圓トノ距離トハ此點ヨリ,之ヲ過グル中心線ト圓周トノ二交點ノ中ノ近キ點ニ至ル距離ナリ。

註.　中心線トハ中心ヲ過グル直線ノコトナリ。

問　　題

(1) 同心圓ノ中一圓周上ノ一點ヨリ他ノ圓周ニ至ル距離ハ相等シ。

註.　同心圓トハ同一ノ中心ノ圓ナリ。

(2) 中心ナラザル點ヨリ圓周上ノ點ニ至ル線分ハ二ツヨリ多ク相等シキモノナシ。

(3) 圓周上ノ三點ヨリ等距離ニ在ル點ハ中心ナリ。

(4) 相離レタル二ツノ圓ノ周上ノ最遠キ點モ,最近キ點モ共通ノ中心線上ニ在リ。

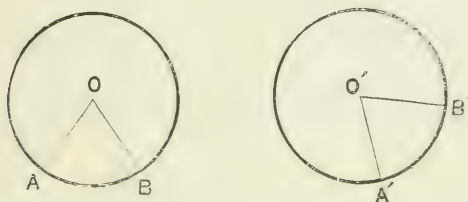
註. 共通ノ中心線トハ兩圓ノ中心ヲ通過スル直線ナリ.

第二章

中心角 弧及弦

108. 定義. 圓ノ二ツノ半徑ノ爲セル角ヲ**中心角**ト云ヒ,此角ハ其夾メル弧ノ上ニ**立ツ**ト云フ。

109. 定理五. 等圓又ハ同圓ニ於テ中心角 (AOB, A′O′B′) ガ相等シキトキハ其夾弧 (AB, A′B′) モ亦相等シ。

[證明] O及O′ヲ等圓トス。圓Oヲ取リ其中心角AOBヲ之ニ等シキ中心角A′O′B′ノ上ニ重ヌ

ルトキ兩圓ノ半徑ハ相等シキ故A, BハA′,B′ト合シ,同時ニ弧ABハ弧A′B′ニ合ス(103)。

$$\therefore \quad 弧AB = A'B'。$$

同圓ノ場合ニ於テハ其圓自己ヲ,中心ヲ周リテ回轉シ一ノ中心角ガ他ノ中心角ニ重ナル位置ニ來ラシメタルトキ其弧ハ相合スベシ(103系一)。

系一. 等圓又ハ同圓ニ於テ中心角ガ不等ナルトキ大角ノ夾弧ハ小角ノ夾弧ヨリ大ナリ,而シテ其逆モ亦眞ナリ。

系二. 等圓又ハ同圓ニ於テ等弧ニ對スル中心角ハ相等シ。

110. **定理六.** 等圓又ハ同圓ニ於テ等弧ノ弦ハ相等シ。

(重置法ニ依リテ證明スベシ)。

逆ニ等弦ヲ有スル弧ハ相等シ。

(直接ニ半徑ヲ引キテ生ゼル三角形ヲ比較シテ證明スベシ)。

111. **定理七.** 等圓又ハ同圓ニ於テ大弧(AB)ノ弦ハ小弧(CD)ノ弦ヨリ大ナリ。逆モ亦眞ナリ。

[證明] 中心ヲOトセバ

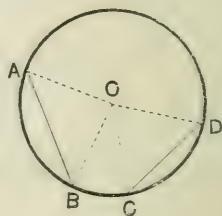
弧 AB > CD。

∴ ∠AOB > COD。

今 △AOB, COD ニ於テ

二邊夫々相等シク夾角不等ナリ。

∴ 弦 AB > CD。

逆モ亦容易ニ證明スルコトヲ得。

問　　題

(1) 同圓ニ於テ或弧ノ弦ハ其二倍弧ノ弦ノ半

分ヨリ大ナリ。

(2) 弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ其弧ヲ三等分スルコトナシ。

112. 定理八. 弦(AB)ニ垂直ナル直徑(MN)ハ此弦及共軛弧(AMB, ANB)ヲ二等分ス。

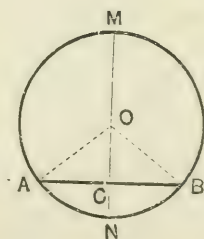
[證明] 中心ヲOトシ, ABトMNトノ交點ヲCトスレバ直角三角形ACO, BCOハ斜邊ト一邊トヲ等シクス,故ニ合同ナリ。

$\therefore$ AC = BC。

又中心角 AON = BON,

$\therefore$ 弧 AN = BN。

又 $\angle$AOM = BOM,

$\therefore$ 弧 AM = BM。

系一. 弦ノ垂直二等分線ハ中心ト弧ノ中點トヲ通過ス。

系二. 弦ノ中點ヲ通過スル中心線ハ此弦ニ垂直ナリ。

系三. 平行ナル二弦ノ間ニ夾マレタル二ツノ弧ハ相等シ。

問　　題

(1) 同心圓ノ弦ノ兩圓周ノ間ニ夾マレタル部分ハ相等シ。

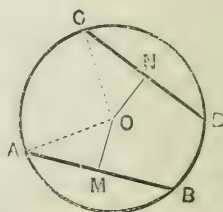
(2) 平行ナル二弦ノ端ヲ連ヌル直線ノ夾角ヲ二等分スル直線ハ中心ヲ通過ス。

113. 定理九. 等圓又ハ同圓ニ於テ等弦ハ其中心ヨリ等距離ニ在リ。

［假設］ O ヲ圓ノ中心トシ弦 AB = CD トス。

［終結］ O ト此二弦ノ距離 OM, ON ハ相等シ。

［證明］ 半徑 OA, OC ヲ引ケ。OM ハ AB ヲ二等分シ, ON ハ CD ヲ二等分ス。故ニ AM = CN。而シテ OA = OC。故ニ $\triangle AOM \equiv CON$。

$$\therefore \quad OM = ON.$$

系. 等圓又ハ同圓ニ於テ中心ヨリ等距離ニ在ル二弦ハ相等シ。

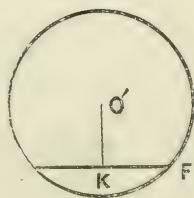
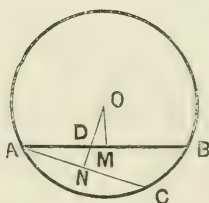
114. 定理十. 等圓又ハ同圓ニ於テ大弦ハ小弦ヨリモ中心ニ近シ。

[假設] 等圓 O, O′ ニ於テ弦 AB ガ弦 EF ヨ大ナリトシ, $OM \perp AB$, $O'K \perp EF$ トス.

[終結] $OM < O'K$。

[證明] 兩圓ヲ合セシメテ E 點ヲ A 點ニ重ネ, 弦 AB, EF ヲ OA ノ同ジ側ニ置クトキハ弧 EF ガ弧 AB ヨリモ小ナル故其一部分トナル。AC ヲ其 EF ノ位置トシ ON ヲ O′K ノ位置トセバ ON ハ弦 AB ト D ニ於テ交ル。

$\therefore \quad OM < OD < ON$。

$\therefore \quad OM < O'K$。

系. 等圓又ハ同圓ニ於テ中心ニ近キ弦ハ中心ニ遠キ弦ヨリモ大ナリ

問 題

(1) 直徑ハ最大ナル弦ナリ。

(2) 圓內ノ一定點ヲ通過スル弦ノ中,此點ヲ中點トスルモノガ最小ナリ。

(3) 等弦ガ相交ルトキ交點ニテ分タレタル部分ハ二ツ宛相等シ。

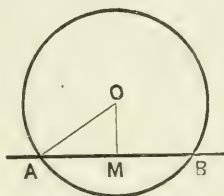
(4) AB, CD ヲ圓ノ等弦トシ,之ヲ夫々 E, F マデ延長シテ BE = DF ナラシムレバ EF ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ通過ス。

第 三 章

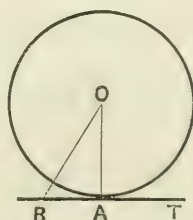
相 交 及 相 切

115. **定義.** 圓周ト二點ヲ共有スル直線ヲ**割線**ト云ヒ,唯一點ヲ共有スル直線ヲ**切線**ト云ヒ,此點ヲ其**切點**ト云フ。

116. 定理十一. 半徑(OA)ノ端ニ於テ之ニ斜交スル直線(AB)ハ割線ナリ。

［證明］ 中心Oヨリ直線ABヘ垂線OMヲ引クトキハ $OM < OA$。故ニ此直線上ニ於テMBヲMAニ等シク取ルトキOBハOA卽半徑ニ等シ。故ニB點ハ圓周上ニアリ。故ニABハ割線ナリ。

系. 圓周ト直線トノ交點ハ二點ヨリ多カラズ。

117. 定理十二. 半徑(OA)ノ端ニ於テ之ニ直交スル直線(AT)ハ切線ナリ。

［證明］ Bヲ線AT上ノAニアラザル任意ノ點トスレバOAハ垂線ナル故 $OB > OA$。故ニBハ圓外ニアリ。故ニATハ圓トA唯一點Aヲ共有ス。故ニ切線ナリ。

系一. 切線ハ切點ヲ通過スル中心線ニ垂直ナリ。

系二. 切點ヲ過ギ切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心線ナリ。

問　　題

(1) 弦ニ平行ナル切線ハ切點ニ於テ弧ヲ二等分ス。

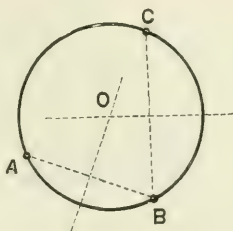
(2) 平行ナル弦ノ中點ハ之ニ平行ナル切線ノ切點ヲ過グル直徑上ニ在リ。

(3) Oヲ中心トスル圓周ノ一點Aニ於ケル切線ト任意ノ半徑OBノ延長トノ交點ヲCトシOBニ垂線ADヲ引クトキハABハ角DACヲ二等分ス。　(陸士)

118. 定理十三. 同一ノ直線中ニ在ラザル三點ヲ通過スル圓ハニアリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] 線分ABノ垂直二等分線中ノ點ハA,Bヨリ等距離ニ在リテ其線外ノ點ハ然ラズ(47 系一).

又線分 BC ノ垂直二等分線中ノ點ハ皆 B, C ヨリ等距離ニ在リテ其線外ノ點ハ然ラズ。

然ルニ A,B,C ハ一直線中ニ在ラザル故兩垂線ハ或點 O ニ於テ交ル。

(58系四)。此點ハ三點 A, B, C ヨリ等距離ニ在ル點ニシテ且此點ノ外ニ三點 A, B, C ヨリ等距離ニアル點ナシ。

故ニ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周ハ三點 A, B, C ヲ通過ス。

又中心ヲ共有シ半徑ヲ等シクスル圓ハ唯一ナリ。故ニ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周外ニ三點 A, B, C ヲ通過スル圓ナシ。

注意。上ノ定理ヲ略言シテ同一ノ直線中ニ在ラザル三點ハ圓ヲ**決定ス**ト云フ。

系. 三點ヲ共有スル圓周ハ全ク相合ス,即二ツノ圓周ハ三點ヲ共有スル能ハズ.

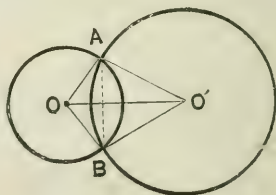
問　　題

(1) 同一ノ直線中ニ在ル三點ヲ通過スル圓アルカ。

(2) 二ツノ同心圓ノ中,小圓ニ切スル大圓ノ弦ハ皆相等シク,且切點ニテ二等分セラル。

(3) 直徑ニアラザル二ツノ弦ハ互ニ二等分セラルヽコトナシ。

119. 定理十四. 二圓周ガ共通ノ中心線(OO′)中ニアラザル點(A)ヲ共有スルトキハ又此線ニ關スル該點ノ對稱點(B)ヲモ共有ス。

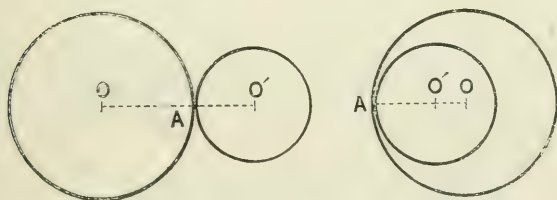
[證明] 二點 A 及 B ハ軸 OO′ ニ關シテ對稱ナル故,OB ハ半徑 OA ニ等シ,故ニ B ハ圓周 O 上ニアリ。

同理ニテ B ハ又圓周 O′ 上ニアリ。

故ニ兩圓ハ B ヲ共有ス。

120.　定義.　二點ヲ共有スル二圓周ハ互ニ**相交ル**ト云フ。

定理十四ヨリ次ノ系ヲ得.

系.　相交ル二圓周ノ共通弦ハ共通ノ中心線ニテ直角ニ二等分セラル。

121.　定理十五.　二圓周ガ共通ノ中心線(OO′)中ニ在ル一點(A)ヲ共有スルトキハ其他ニ一點ヲモ共有セズ。

[證明]　中心O′ガ圓Oノ內外ニ在ルニ拘ラズ點O′ヨリ圓Oニ至ル最短線分ハO′Aナリ(106)。

故ニ圓周上Oノ總テノ點ハAヲ除クノ外皆圓O′ノ外ニアリ。

故ニAノ外ニ共有點ナシ.

122. 定義. 唯一點ヲ共有スル二ツノ圓ハ互ニ**相切ス**ト云ヒ,其點ヲ**切點**ト云フ。

切點ガ兩中心ノ間ニ在ルトキハ各圓ハ他ノ外ニ在リ,之ヲ**外切**ト云フ。

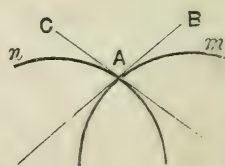
切點ガ兩中心ノ間ニ在ラザルトキ小圓周ハ全ク大圓周ノ内ニアリ,之ヲ**內切**ト云フ。

定理十五ヨリ次ノ二ツノ系ヲ得。

系一. <u>兩圓相切スルトキ,其切點ハ共通ノ中心線上ニアリ。</u>

系二. <u>兩圓相切スルトキ,切點ニ於テ共通ノ切線ヲ引クコトヲ得。</u>

123. 定義. 二圓周ガ相交ルトキ其交點ニ於ケル各圓周ノ切線ノ爲ス角ヲ此點ニ於ケル**兩圓周間ノ角**ト云フ。

例ヘバ二圓周 m 及 n ガ A 點ニ於テ相交ルト

キ切線 AB, AC ノ間ノ角 BAC ハ卽 A 點ニ於ケル此兩圓周間ノ角ナリ。

直角ニ交ル二圓周ハ之ヲ**直交ス**又ハ**正交ス**ト云フ。例ヘバ直角三角形ノ斜邊ノ兩端ヲ中心トシ他ノ二邊ヲ半徑トスル二圓周ハ直交ス。

124. 定理十六. 兩圓ノ半徑ヲ r, r' トシ中心ノ距離ヲ d トスレバ

[1] 互ニ外方ニ離ルヽトキハ

$d > r + r'$,

[2] 外切スルトキハ $d = r + r'$,

[3] 相交ルトキハ $r + r' > d > r \sim r'$,

[4] 內切スルトキハ $d = r \sim r'$,

[5] 其一ガ全ク他ノ內部ニ入リテ相切セザルトキハ $d < r \sim r'$ ナリ。

系. 上ノ定理ノ逆ハ皆眞ナリ。

問題

(1) 兩圓ノ半徑ガ二尺ト五寸トニシテ中心距離ガ一尺五寸ナルトキ兩圓相互ノ位置ハ如何.

又中心ノ距離ガ二尺二寸ナルトキハ如何。

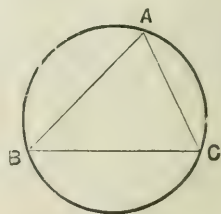
(2) 相切スル兩圓ノ切點ヲ通過シテ任意ニ割線ヲ引クトキ其交點ニ至ル兩半徑ハ平行ナリ。

(3) 相切スル兩圓ノ平行ナル直徑ノ端ト切點トハ三點宛同一ノ直線上ニアリ。

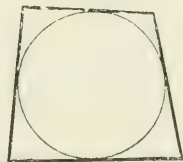
(4) 二ツノ定圓ニ切スル任意ノ圓ノ中心ト兩中心トノ距離ノ和又ハ差ハ一定不變ナリ。

第四章

內接形及外接形

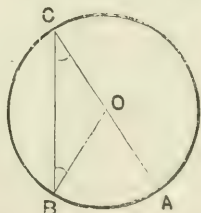
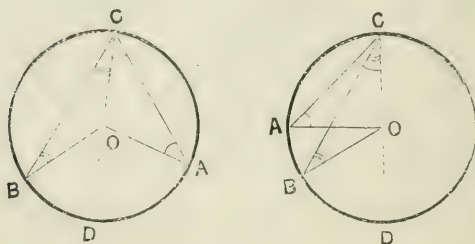
125. 定義. **弓形ノ角**トハ弓形ノ弧ノ上ノ一點ヨリ其弦ノ兩端ヘ引ケル二弦ニテ爲セル角ナリ。而シテ之ヲ完全ナル圓ヨリ見ルトキハ**內接角**ト云フ。

例ヘバ∠BAC ハ弓形 BAC ノ角ニシテ同時ニ弧 EC ノ上ニ立ツ內接角ナリ。

126. 定義. 多角形ノ頂點ガ皆同一ノ圓周上ニアルトキ此多角形ハ圓ニ**內接**スト云ヒ,圓ハ此多角形ニ**外接**スト云フ。

127. 定義. 多角形ノ邊ガ皆同一ノ圓ニ切スルトキ此多角形ハ圓ニ**外接**スト云ヒ,圓ハ之ニ**內接**スト云フ。

128. 定理十七. 內接角(ACB)ハ同弧ノ上ニ立ツ中心角(AOB)ノ半ニ等シ。

[證明] I. 內接角ノ邊 AC ガ中心 O ヲ通過スルトキ △EOC ハ等脚三角形ナリ。

∴ ∠ACB = OBC,

∴ ∠AOB = 2 ACB。

II. 邊ガ中心ヲ通過セザルトキハ直徑 CD ヲ引ケ。然ラバIニ由リテ

$$\angle AOD = 2\,ACD,\quad \angle BOD = 2\,BCD.$$

$$\therefore\quad \angle AOD \pm BOD = 2(ACD \pm BCD).$$

$$\therefore\quad \angle AOB = 2\,ACB.$$

故ニ總テノ場合ニ於テ

$$\angle ACB = \tfrac{1}{2}\,AOB.$$

系一. 同ジ弓形ノ角ハ皆相等シ。

系二. 弓形ト其弦ノ同側ニ在ル點トヲ此弦ノ兩端ニ連ヌルトキ,其二線ノ夾角ハ,該點ガ弓形ノ內ニ在レバ弓形ノ角ヨリ大ニシテ弓形ノ外ニ在レバ之ヨリ小ナリ。逆モ亦眞ナリ。

系三. 弓形ガ半圓ナレバ其角ハ直角ニシテ半圓ヨリ大ナレバ其角ハ銳角ナリ,又半圓ヨリ小

ナレバ其角ハ鈍角ナリ。逆モ亦眞ナリ。

系四. 同圓又ハ等圓ニ於テ等弧ノ上ニ立ツ內接角ハ相等シ。逆モ亦眞ナリ。

問　　題

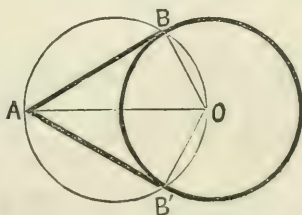
(1) 一ツノ圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ハ內切圓ニシテ其周ハ切點ヲ過グル弦ヲ二等分ス。

（千醫）

(2) 同ジ弓形ノ總テノ角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通過ス。

(3) 三角形ノ二邊ヲ直徑トスル圓ハ底邊或ハ其延長ノ上ニ於テ相交ル。（東師）

129. 定理十八. 圓(O)外ノ點(A)ヲ過グル此圓ノ切線ハ二ツアリ,而シテ唯二ツニ限ル。

[證明] 圓Oノ周ト直線 AO ヲ直徑トスル圓トハ相交ル。其交點ヲB及B′トスレ

バ二直線 AB, AB′ ハ夫々圓 O ノ半徑 OB, OB′ ノ端ニ於テ此等ノ半徑ニ垂直ナリ (128 系三)。故ニ此二線 AB, AB′ ハ二ツノ切線ナリ。

次ニ此二ツノ切線ノ外ニ一ツノ切線 AB″ アリテ其切點ヲ B″ トセバ ∠AB″O モ亦直角ナリ。故ニ B″ ハ AO ヲ直徑トスル圓周上ニアリ (118 系, 128 系三)。故ニ此圓周ト圓 O ノ周トハ三點 B, B′, B″ ヲ共有ス,故ニ合同ナリ (118 系)。故ニ A 點モ亦圓 O ノ周上ニ在ラザルベカラズ。故ニ A 點ガ圓 O ノ外ニアルトキハ A ヲ過グル此圓ノ切線ハ唯二ツニ限ル。

系. 圓外ノ點ヨリ引ケル二ツノ切線ノ部分(此點ト切點トノ間ニアル)ハ相等シク,且此點ヲ過グル中心線ト等角ヲナス。

問　題

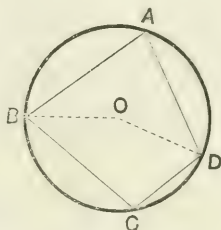
(1) 圓ニ外接スル四邊形ノ一雙ノ對邊ノ和ハ他雙ノ對邊ノ和ニ等シ。逆モ亦眞ナリ。

(二高・盛農・高師・山商)

(2) 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形ナリ。

(東商)

130. 定理十九. 圓ニ內接スル四邊形(ABCD)ノ對角ハ補角ヲ爲ス。

[證明] 角Aハ弧BCDノ上ニ立ツ中心角ノ半ニ等シク,角Cハ弧BADノ上ニ立ツ中心角ノ半ニ等シ。故ニ∠A+CハOニ於ケル共軛ナル二角ノ和ノ半卽二直角ニ等シ。

同樣ニ ∠B+D モ亦二直角ニ等シ。

系一. 圓ニ內接スル四邊形ノ外角ハ其內對角ニ等シ。

註. 或外角ノ**內對角**トハ其外角ニ隣レル內角ニ對スル角ヲ云フ。

系二. 圓ニ內接セザル四邊形ノ對角ノ和ハ二直角ニ等シカラズ。

系三. 四邊形ノ對角ノ和ガ二直角ニ等シケレバ此四邊形ハ圓ニ內接ス。

系四. 四邊形ノ對角ノ和ガ二直角ニ等シカラザレバ此四邊形ハ圓ニ內接セズ

問　題

(1) 角ト弦トヲ等シクスル二ツノ弓形ハ合同ナリ。

(2) 三角形ノ垂心ト任意ノ二頂點トヲ通過スル圓ハ此三角形ノ外接圓ニ等シ。

定理ノ形狀

131. 定理ノ假設及終結ハ常ニ之ヲ次ノ形狀ニ述ブルヲ得。

(1) <u>AガBナルトキハCハDナリ。</u>

之ヲ原定理トスレバ其逆ハ

(2) <u>CガDナルトキハAハBナリ。</u>

今若

(3) <u>AガBナラザルトキハCハDナラズ</u>

ト云ハバ是(1)ノ裏ト名クル定理ニシテ

(4) <u>CガDナラザルトキハAハBナラズ</u>

ト云ハバ是(1)ノ對偶ト名クル定理ナリ。

例ヘバ定理十九ト其系二トハ互ニ裏ヲ爲シ系二ト系三トハ互ニ對偶ヲ爲シ,定理十九ト系四ト

ハ亦對偶ヲナス。

或定理ト其對偶トハ其眞否相關聯シ,其一眞ナラバ他モ亦必眞ナリ。然レドモ原定理ト其逆又ハ裏トハ全ク獨立ナルモノニシテ別ニ之ヲ證明スルヲ要シ,其一眞ナルモ他ハ必眞ナリト速斷スベカラズ。又逆ト裏トハ互ニ對偶ヲナシ從テ其一眞ナレバ他ハ必眞ナリ。

問　題

(1) 圓ニ內接スル六邊形ノ隔次ニ取リタル三角ノ和ハ四直角ニ等シ.

(2) 兩圓相交ルトキ其各交點ヲ通過シテ割線ヲ引ケバ此二線間ニ夾マレタル二弧ノ弦(兩圓ノ共通弦ニアラザル)ハ平行ナリ。　(二高·海兵)

(3) 三角形ノ三垂線ノ足ヲ連ネテ生ズル三角形ノ邊ハ原形ノ邊ト等角ヲ爲ス。　(商船)

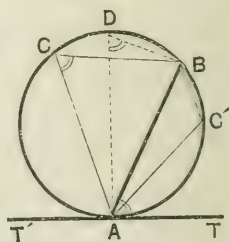
注意。此三角形ヲ原形ノ**垂足三角形**ト云フ。

(4) 四邊形ABCDガ圓ニ內接スルトキ對邊ヲ延長シテ E, F ニ會セシムレバ $\triangle BCE, DCF$ ノ外接圓ハ EF 上ニ於テ交ル。

(5) 三角形ABCノ外接圓ノ周上ノ一點Pヨリ三邊BC, CA, ABヘ垂線ヲ下シ其足ヲ夫々D, E, FトセバD, E, Fハ一直線上ニアリ。 (八高・陸士)

注意。 此定理ヲ *Simson* ノ定理ト云ヒ,此直線ヲP點ノ***Simson***線ト云フ。

132. 定理二十. 切線ト其切點ヲ過グル弦トノ間ノ角(BAT)ハ此角内ノ弧ノ上ニ立ツ内接角(ACB)ニ等シ。

[證明] 直徑ADヲ引ケバDATハ直角ナル故∠BATハBADノ餘角ナリ。又ABDハ直角三角形ナル故∠Dモ亦BADノ餘角ナリ。

$$\therefore \quad \angle BAT = D = C.$$

$$\therefore \quad \angle BAT' = AC'B.$$

系. 弓形ノ弦ノ一端ヲ通過シ,此弦ト其反對ノ側ニ於テ弓形ノ角ニ等シキ角ヲ作ル線ハ圓ノ切線ナリ。

問　題

(1) 圓周上ノ一點Cニ於テ切線ヲ引キ任意ノ直徑ABノ一端Aヨリ此切線ヘ垂線ADヲ下ストキACハ角BADヲ二等分ス。

(2) 兩圓相切スルトキ其切點ヲ通過シ二ツノ割線ヲ引ケバ此二線間ニ夾マレタル二弧ノ弦ハ平行ナリ。

(3) 圓ニ內接スル三角形ABCノ頂點Aニ於ケル切線ニ平行ナル直線BDヲ引キ邊AC或ハ其延長トDニ於テ交ラシムルトキ三角形BCDノ外接圓ハ邊ABニ切ス。

(4) 直角三角形ノ一邊ヲ直徑トセル圓ガ弦(斜邊)ニ交ル點ニ於ケル切線ハ他ノ邊ヲ二等分ス。

(熊工・小商・東師・醫專)

(5) 三角形ノ垂線ノ足ハ垂線ガ外接圓ニ會スル點ト垂心トノ半途ニアリ。　(五高・商船・海兵)

第五章

作圖題

133. 定義. 作圖題トハ所設ノ條件ニ適合スル圖形ヲ畫ク方法ヲ求ムル問題ナリ。

所設ノ條件ニ適合スル圖形ヲ畫ク方法ヲ**作圖ノ方法**或ハ單ニ**作圖**ト云ヒ,所得ノ圖形ヲ其**解答**ト云フ。作圖題ニ於テハ先作圖ノ方法ヲ述ベ解答ヲ得タル後,此等ノ圖形ガ所設ノ條件ニ適合スルコトヲ**證明**セザルベカラズ。而シテ後作圖ノ可能不能ノ範圍,其可能ノ場合ニ於ケル解答ノ數等ヲ研究セザルベカラズ,之ヲ**吟味**ト云フ。

作圖題ヲ解キタラバ唯其方法ヲ知リタルニ止メズ成ルベク器具ヲ用ヒテ精細ニ之ヲ實施スルヲ要ス,是其應用頗大ナレバナリ。

注意. 初等幾何學ニ於テ作圖ヲ爲スニ當リ使用スルコトヲ許容セラレタル器具ハ目盛リセザル定木及兩脚器ノ二種ニ限ル,前者ハ直線

ヲ引クノ用ニ供シ後者ハ距離ヲ移シ,或ハ圓周ヲ畫クモノトス。

作圖ノ手段

134. 次ノ三ツノ作圖ハ可能ナリト假定シ,是ニ據リテ他ノ總テノ作圖ヲ爲スベキモノトス。

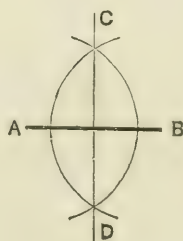
[1] 二點ノ間ニ直線ヲ引クコト。

[2] 有限直線ヲ延長スルコト。

[3] 或點ヲ中心トシ或距離ニ等シキ半徑ヲ以テ圓周ヲ畫クコト。

135. 作圖題一. 所設ノ有限直線ノ垂直二等分線ヲ引ケ。

[作圖] 所設ノ有限直線ヲ AB トス.

其兩端 A, B ヲ中心トシ同ジ半徑ヲ以テ二圓周ヲ畫キ (134[3]) C, D ニ於テ相交ラシメ,直線 CD ヲ引ケバ (134[1]), 此直線 CD ガ所要ノ垂直二等分線ナリ.

[證明] AC=BC, AD=BD ナル故 CD ハ AB ノ垂直二等分線ナリ(47系二)。

[吟味] 二圓周ヲ畫クコト及其二交點ノ間ニ直線ヲ引クコトハ常ニ可能ナリ。故ニ作圖ハ常ニ可能ナリ。而シテ解答ノ數ハ唯一ナリ。

問　　題

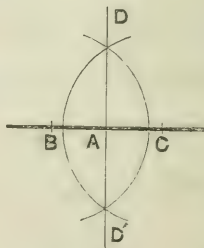
(1) 一邊ヲ知リテ正三角形ヲ畫ケ。

(2) 所設ノ圓弧ヲ二等分セヨ。

(3) 所設ノ線分ヲ直徑トシテ圓ヲ畫ケ。

136. 作圖題二. 所設ノ直線中ノ所設ノ點ヲ過ギテ其垂線ヲ引ケ。

[作圖] 所設ノ直線ヲ BC トシ其中ノ所設ノ點ヲ A トス。

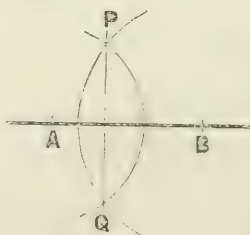
兩脚器ヲ以テ等長 AB, AC ヲ取リ(134[3]),二點 B 及 C ヲ中心トシ AB ヨリ大ナル半徑ヲ以テ二圓周ヲ畫キ,其交點ヲ D, D′ トシ,直線 DD′ ヲ引ケバ (134[1])

此直線ガ所要ノ垂線ナリ。

[證明] BD=CD, BD′=CD′ナル故 DD′ハ BC ノ垂直二等分線ナリ(47系二)。故ニ DD′ハ BC ノ中點 A ヲ過ギ且 BC ノ垂線ナリ。

[吟味] 二點 B, C ヲ定ムルコト,之ヲ中心トスル二圓周ヲ畫クコト及直線 DD′ヲ引クコトハ皆常ニ可能ナリ。故ニ作圖ハ常ニ可能ナリ。而シテ解答ノ數ハ唯一ナリ。

137. 作圖題三. 所設ノ直線外ノ所設ノ點ヨリ此線へ垂線ヲ引ケ。

[作圖] 所設ノ直線ヲ AB トシ其外ノ所設ノ點ヲ P トス。

直線 AB 上ノ任意ノ二點 A, B ヲ中心トシ,夫々 AP, BP ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キ (134 [3]),第二ノ交點ヲ Q トシ,直線 PQ ヲ引ケバ (134 [1]),此直線ガ所要ノ垂線ナリ。

[證明] PA=QA, PB=QB ナル故 AB ハ PQ ノ

垂直二等分線ナリ(47系ニ或ハ120系)。

故ニPQハPヲ過グルABノ垂線ナリ。

[吟味] A, Bヲ中心トスル二圓周ヲ畫クコト及直線PQヲ引クコトハ常ニ可能ナリ。故ニ作圖ハ常ニ可能ナリ。而シテ解答ノ數ハ唯一ナリ。

問　　題

(1) 直線ノ一端ニ於テ之ニ垂線ヲ引ケ。但此點ヲ超エテ直線ヲ延長スルヲ許サズ。（海兵）

(2) 一邊ヲ知リテ正方形ヲ畫ケ。

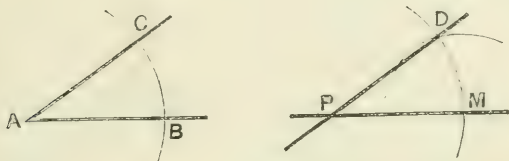
(3) 一邊ト對角線トヲ知リテ矩形ヲ畫ケ。

(4) 對角線ヲ知リテ正方形ヲ作レ。

138. 作圖題四. 所設ノ直線中ノ所設ノ點ヨリ直線ヲ引キ所設ノ角ニ等シキ角ヲ作レ。

[作圖] 所設ノ直線ヲPMトシ其中ノ所設ノ點ヲPトシ,又所設ノ角ヲBACトス。

Aヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓周ヲ畫キ(134[3])B, Cニ於テ其二邊ニ交ラシム。次ニ同ジ半徑ヲ以テPヲ中心トシ圓ヲ畫キ(134[3]) Mニ

於テ直線 PM ニ交ラシム。然ル後 M ヲ中心トシ BC ニ等シキ半徑ヲ以テ圓周ヲ畫キ(134 [3]) 前ノ圓周ト交ル點ノ一ヲ D トス。直線 PD ヲ引ケバ之レ所要ノ直線ナリ。

[證明] 二直線 MD, BC ヲ引クトキハ △PMD, ABC ニ於テ PM=AB, PD=AC, MD=BC。

∴　　$\triangle PMD \equiv ABC$。

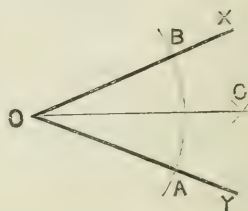
∴　　$\angle MPD = BAC$。

[吟味] 二圓弧 BC, MD ヲ畫クコト, M ヲ中心トシ BC ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫クコト及直線 PD ヲ引クコトハ皆常ニ可能ナリ。故ニ作圖ハ常ニ可能ナリ。

P ヲ中心トシ AB ニ等シキ半徑ヲ有スル圓弧ト M ヲ中心トシ BC ニ等シキ半徑ヲ有スル圓弧トハ二點ニ於テ交リ,其點ハ一ツ宛 PM 線ノ兩側

ニアリ。故ニ所設ノ條件ニ適合スル直線ハ二ツアリ。

139. 作圖題五. 所設ノ角ノ二等分線ヲ引ケ。

[作圖] 所設ノ角ヲ XOY トス。

頂點 O ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ弧ヲ畫キ A, B ニ交ラシメ,此二點ヲ中心トシ適當ノ等半徑ヲ以テ二圓ヲ畫キ其交點ノ一ヲ C トスレバ OC ハ所要ノ二等分線ナリ。

[證明] 二直線 AC, BC ヲ引クトキハ $\triangle AOC$, BOC ハ三邊ヲ等シクスル故合同ナリ。

$$\therefore \qquad \angle AOC = BOC.$$

[吟味] 弧 AB ヲ畫クコト及 C 點ヲ求ムルコトハ常ニ可能ナリ。故ニ作圖ハ可能ナリ。

A, B ヲ中心トスル二圓弧ノ交點ハ二ツアレドモ之ヲ O ニ連ヌル直線ハ共ニ角 XOY ノ二等分線ニシテ唯一アルノミ。

注意。上ノ方法ヲ累次應用スルトキハ或角ノ $\frac{1}{2^n}$ ニ等シキ角ヲ作ルコトヲ得。

然レドモ定木ト兩脚器トノミヲ以テ一般ニ任意ノ角ヲ三等分スルコト能ハズ。

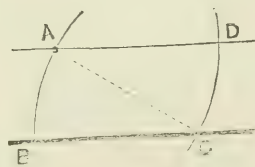
問　題

(1) 45°及135°ノ角ヲ作レ。

(2) 所設ノ直角ヲ三等分セヨ。

(3) 高サト頂角トヲ知リテ等脚三角形ヲ畫ケ。

140. 作圖題六. 所設ノ點(A)ヲ過ギ所設ノ直線(BC)ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

[作圖] AヨリBCニ交ル任意ノ直線ACヲ引キ(134[1]), 次ニ角ACBニ等シキ角ヲACト錯角ノ位置ニ作リテADヲ引ケ(138), 此直線ADハ所要ノ直線ナリ。

注意。以下作圖ノ方法ノミヲ掲ゲテ其證明及吟味ヲ述ベザルコトアリ。學ブ者宜シク之ヲ補充スベシ。

若シ同形ノ二ツノ三角定木ヲ用フルコトヲ許セバ容易ニ本題ヲ解クコトヲ得。

問　　題

(1) 所設ノ直線ヨリ既知ノ距離ニアル平行線ヲ引ケ。

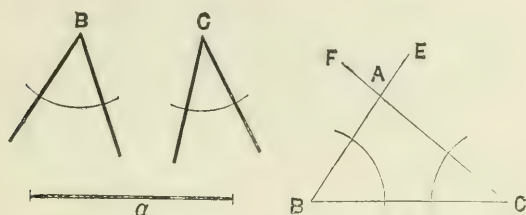
(2) 定直線外ノ定點ヨリ此線ト既知ノ角ヲ爲スベキ直線ヲ引ケ。

(3) 所設ノ線分ヲ若干等分セヨ。

(4) 定點ヲ過グル直線ヲ引キ所設ノ平行線間ニアル部分ヲ定長ニ等シカラシメヨ。

141. 作圖題七. 二角(B, C)及其頂點間ノ邊(a)ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

[作圖] aニ等シキ直線BCヲ引キ(134[1][3]),其端ニ於テ夫々二角B, Cニ等シキ角ヲBCノ同側ニ作リ,直線BE, CFヲ引キ(138),交點ヲAトスレ

バ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

〔證明〕 △ABC ノ二角 ABC, ACB 及其頂點間ノ邊 BC ハ夫々所設ノ二角ノ大サ及邊ノ長サニ等シ。故ニ△ABC ハ所設ノ條件ニ適合ス。

〔吟味〕 直線 BC ヲ引クコト及二角ヲ BC ノ同側ニ作リテ直線 BE, CF ヲ引クコトハ常ニ可能ナリ。然レドモ二角 B, C ノ和ガ二直角ヨリ小ナラザルトキハ本題ヲ解クコト能ハズ。其故ハ
∠B+C ガ平角ナラバ BE, CF ハ平行ニシテ
∠B+C ガ平角ヨリ大ナラバ BE, CF ハ二角ヲ作リタル側ニ於テ交ラザレバナリ。

二角ヲ BC ノ同側ニ作ルトキハ BC ノ何レノ側ニ作ルモ可ナルヲ以テ二個ノ場合ヲ生ジ,又二角ノ中何レヲ BC ノ何レノ端ニ置クモ可ナルヲ以テ二個ノ場合ヲ生ズ。故ニ邊 BC ノ位置ガ定

マレリトセルトキニ一般ニ四個ノ三角形ヲ得。

而シテ邊BCノ位置ハ任意ナリ。故ニ所設ノ條件ニ適合スル無數ノ三角形ヲ得。

然レドモ此等ノ三角形ハ合同ナリ。故ニ解答ノ數ハ唯一ナリ。

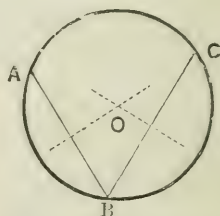
問　　題

(1) 二邊ト其夾角ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

(2) 三邊ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

(3) 三角形ノ二角ヲ知リテ第三角ヲ作レ。

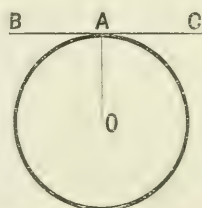
142. 作圖題八. 所設ノ圓ノ中心ヲ求メヨ。

[作圖] 所設ノ圓周上ニ任意ノ三點A, B, Cヲ取リ弦AB, BCノ垂直二等分線ヲ引ケバ(135)其交點Oハ所要ノ中心ナリ(118)。

注意. 上ト同樣ノ作圖ニ因リテ同一ノ直線上ニアラザル三點ヲ過グル圓又ハ三角形ノ外

接圓ヲ畫クコトヲ得(118)。

143. 作圖題九. 所設ノ圓周上或ハ其外ニ在ル所設ノ點(A)ヲ通過シテ此圓周ニ切線ヲ引ケ。

I. 所設ノ點Aガ所設ノ圓周上ニ在ル場合.

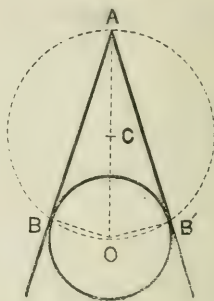
[作圖] 所設ノ圓ノ中心Oヲ求メ(142), Aヲ過ギAOニ垂線BCヲ引ケバ(136),是レ所要ノ切線ナリ。

[證明] 直線BCハ半徑ノ端ニ於テ之ニ直交ス,故ニ切線ナリ(117)。

[吟味] 中心Oヲ求ムルコト,Aヲ過ギAOニ垂線BCヲ引クコトハ常ニ可能ナリ。故ニ作圖ハ常ニ可能ナリ。而シテ解答ノ數ハ唯一ナリ。

II. 所設ノ點Aガ所設ノ圓外ニ在ル場合。

[作圖] 所設ノ圓ノ中心Oヲ求メ(142). AOヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ(第108頁問題3), 所設ノ圓トノ交點ヲB及B′トスレバ二直線AB, AB′ハ何レ

モ所要ノ直線ナリ。

[證明] B, B′ ハ AO ヲ直徑トスル圓周上ニアリ。故ニ角 ABO, AB′O ハ直角ナリ(128系三)。故ニ AB, AB′ ハ切線ナリ。

[吟味] 中心Oヲ求ムルコト, AO ヲ直徑トスル圓ヲ畫クコト及直線 AB, AB′ ヲ引クコトハ皆常ニ可能ナリ。故ニ作圖ハ常ニ可能ナリ。

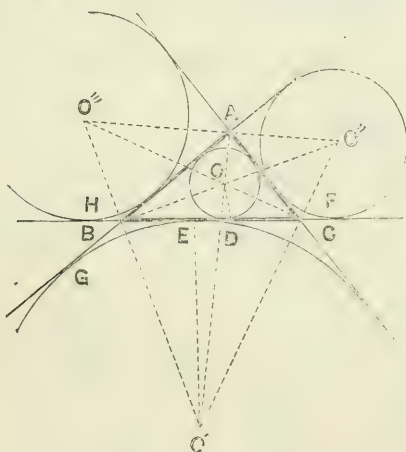
而シテ解答ノ數ハ唯二ツナリ。

注意。 所設ノ圓內ニ在ル所設ノ點ヲ通過シテ此圓周ニ切線ヲ引クコト能ハズ。其故ハ若切線中ノ點ガ圓內ニ在リトスレバ此切線ノ一部分ガ其圓內ニアル故其延長ト圓周トガ切點ノ外ニ尙一點ヲ共有スルコトヽナレバナリ。

問　　題

(1) 圓ノ中心ヲ求メズシテ其圓周上ノ一定點ヲ過グル切線ヲ引ケ。　(海兵)

(2) 三角形ヲナセル三ツノ無限直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

注意　此圓 O ヲ △ABC ノ内接圓ト云ヒ圓 O′, O″, O‴ ヲ傍接圓ト云フ。先ニ O ヲ其内心ト云ヒ, O′, O″, O‴ ヲ傍心ト云ヒシハ之ガタメナリ(第54頁問題)。

(3) 上圖ノ △ABC ノ周圍ノ半ヲ s トスレバ,

$$AG=BF=CH=s, \quad DF=HE=b,$$

$$BH=CF=s-a, \quad DH=EF=c,$$

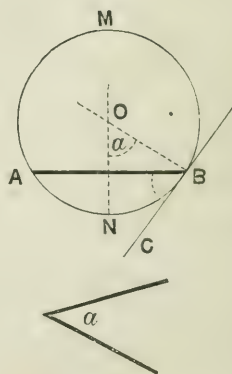
$$BD=CE=s-b, \quad DE=b\sim c,$$

$$BE=CD=s-c, \quad HF=b+c$$

(4) 三角形ノ内心ト傍心ノ一ト二頂點トハ同一ノ圓周上ニアリ。又二ツノ傍心ト二頂點トモ亦然リ。　（長商）

(5) 三角形ノ内心ト傍心トヲ連ヌル直線ハ外接圓ニテ二等分セラル。

144. 作圖題十. 所設ノ線分 (AB) 上ニ既知ノ角 (α) ヲ容ルベキ弓形ヲ畫ケ。

[作圖] AB ノ一端 B ニ於テ α ニ等シキ角 ABC ヲ作リ, B ニ於テ BC ニ垂線 BO ヲ引キ AB ノ垂直二等分線ト O ニ於テ交ラシムルトキハ O ヲ中心トシ OB ヲ半徑トスル弓形 AMB ガ所要ノ弓形ナリ。

注意. 他方ノ側ニモ亦所要ノ弓形ヲ畫クコトヲ得。

問　　題

(1) 所設ノ圓ヨリ既知ノ角ヲ容ルベキ弓形ヲ截リ取レ。

(2) 所設ノ三角形ト等角ナル三角形ヲ所設ノ圓內ニ畫ケ。

(3) 所設ノ三角形ト等角ニシテ他ノ三角形ニ外接スベキ三角形ヲ畫ケ。

註. 多角形ノ各邊ガ第二ノ多角形ノ頂點ヲ過グルトキ前者ハ後者ニ**外接**スト云ヒ,後者ハ前者ニ**內接**スト云フ。

第六章
軌　　跡

145. 定義. 或圖形中ノ總テノ點ガ或性質ヲ有シ其他ノ點ハ皆此性質ヲ有スルコトナケレバ,此圖形ハ此性質ヲ有スル點ノ**軌跡**ナリト云フ。

例ヘバ圓周上ノ總テノ點ハ其中心ヨリ一定ノ距離ニアリテ他ノ點ハ此距離ニ在ラズ。故ニ

定點ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ此定點ヲ中心トシ定距離ヲ半徑トスル圓周ナリ。

又第47節系一ニヨリテ

二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ此二定點ヲ連又ル線分ノ垂直二等分線ナリ。

146. 前ノ定義ニ從ヘバ或圖形ガ或性質ヲ有スル點ノ軌跡ナルコトヲ斷定スルニハ次ノ二命題ヲ證明スルコト必要ニシテ且十分ナリ。

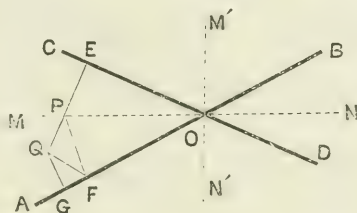
[1] 其圖形中ノ總テノ點ハ所設ノ性質ヲ有ス。

[2] 其圖形外ノ總テノ點ハ該性質ヲ有セズ。

又ハ此二ツニ代用スルニ各其對偶ヲ以テスルコトアリ。

注意. 或性質ヲ有スルコトヲ或條件ニ適合ストモ云フ。

147. 定理二十一. 相交線(AB, CD)ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其間ノ角ヲ二等分スル一雙ノ直線ナリ。

［證明］ I. 角AOC, BOCノ二等分線ヲMN, M′N′トシPヲ其線中ノ任意ノ點トス。PヨリAB, CDヘ垂線PF, PEヲ下セバ

PE＝PF。

其故ハ直角三角形PEO≡PFOナレバナリ。

II. Q點ヲ二等分線外ノ點トセバ垂線

$$QG \neq QE.$$

其故ハQヲ角MOAノ内ニ在リトシQEトMNトノ交點ヲPトセバ

$$PE = PF,$$

$$\therefore \quad QE = QP+PF.$$

然ルニ　$QP+PF > QF > QG.$

$$\therefore \quad QE > QG.$$

又Qガ角MOC内ニアルトキハQE＜QGナリ

M′N′線中ノ點ガ亦同様ノ性質ヲ有スルコトハ容易ニ證明スルヲ得。

故ニ MN, M'N' ハ所要ノ軌跡ナリ。

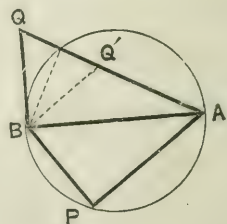
注意。 II ノ部分ニ其對偶ヲ代用スレバ遙ニ其簡單ナルコトヲ覺ルベシ。

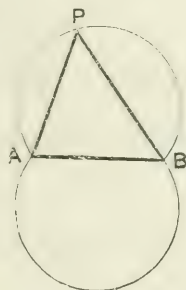
148. 定理二十二. 平行線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其共通垂線ノ中點ヲ過グル平行線ナリ。

系. 定直線ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ此直線ノ兩側ニ於テ其距離ニアル一雙ノ平行線ナリ。

149. 定理二十三. 所設ノ線分 (AB) ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角ノ頂點 (P) ノ軌跡ハ圓周ナリ。

[證明] I. 直線 AB ヲ直徑トシテ圓ヲ畫ケバ圓周上ノ點 P ニ於テ AB ニ對スル角ハ直角ナリ (128 系三).

II. Q ヲ圓周上ニアラザル點トセバ $\angle AQB \neq 90^\circ$.

故ニABヲ直徑トセル圓周ハ所要ノ軌跡ナリ。

系. 頂角ノ大サト底ノ長サ及位置ガ一定セル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ其兩端ヲ通過スル二ツノ圓弧ヨリ成ル圖形ナリ。

問　　題

次ノ諸點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(1) 二定點ヲ通過スル圓ノ中心。

(2) 二定直線ニ切スル圓ノ中心。　(陸士)

(3) 定圓ノ等弦ノ中點。

(4) 定直線又ハ定圓周中ノ定點ニ於テ之ニ切スル圓ノ中心。

(5) 定點ヲ通過スル弦ノ中點.

(東師.海兵.大工.三高)

(6) 定點ヨリ定直線ニ至ル線分ノ中點.

(7) 定點ヨリ定圓周ニ至ル線分ノ中點.

(山商.大工)

(8) 定マレル長サノ線分ノ端ガ直交線ノ上ニ在リテ動クトキ其線分ノ中點。 (大工)

(9) 定圓へ引ケル切線ノ長サガ定圓ノ直徑ニ等シキ點。 (東師)

(10) 三角形ノ頂角ノ大サト底邊ノ長サ及位置トガ一定セルトキ其內心及垂心。 (七高)

第七章

作圖ノ方法

150. 作圖題ヲ解ク爲ニ一般ニシテ確實ナル方法ヲ指示スルコトハ到底成シ得ル所ニ非ズ。蓋其所設ノ條件タル千變萬化ニシテ同一ノ手段ヲ以テ其方法ヲ得ル能ハザレバナリ。然レドモ多クノ場合ニ於テ適用シ得ル一二ノ特別ナル方法アリ。今之ヲ說明スベシ。

軌跡交截法

151. 此法ハ作圖題ノ解法中最有力ナルモノナリ。

作圖題ハ結局其條件ニ適合スル點ヲ發見スルコトニ歸着ス。例ヘバ三定點ヲ通過スル圓ヲ畫クハ其中心ヲ求ムルコトニ歸着シ,又圓外ノ點ヨリ此圓ニ切線ヲ引クコトハ其切點ヲ決定スルコトニ歸着スルノ類ナリ。

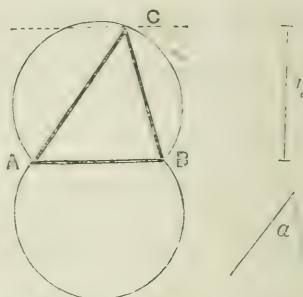
此ノ如キ場合ニ於テ若所題ノ條件中,其一ヲ除去スルトキ殘リノ條件ノミニテハ所要ノ點ノ位置ヲ決定スルニ足ラズシテ,此等ノ條件ニ適合スル點ハ概シテ無數ナリ,從テ所要ノ點ヲ含有スル所ノ或軌跡ヲ得ベシ。是ニ於テ先ニ拋棄シタル條件ヲ回復シ,且他ノ一條件ヲ除去スルトキハ又新ニ一ノ軌跡ヲ得ベシ。然ルトキハ此軌跡ト前ノ軌跡トノ交點ハ所要ノ點ナリ。而シテ交點ノ數數多アルトキハ所得ノ圖形モ亦從テ數多アリ若兩軌跡ノ交點ナキトキハ解答ナキナリ。

[例題] 底 AB ノ長サト位置及高サ h,及頂角ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

[解法] AB ヲ弦トシ $\angle\alpha$ ヲ容ルベキ二ツノ形ハ頂點ノ第一軌跡ナリ(149 系)。

又 AB ヨリ h ノ距離ニアル平行線ハ頂點ノ第

ニ軌跡ナリ(148系)。

故ニ此二ツノ軌跡ヲ畫キ交點ノ一ヲCトセバ △ABC ハ所要ノモノナリ。

[證明] 所得ノ △ABC ハ所設ノ底ヲ有シ且所設ノ大サノ頂角ト高サトヲ有ス。故ニ △ABC ハ所設ノ條件ニ適合ス。

[吟味] 作圖ノ各階段ハ二ツノ軌跡ノ相交ニ關スルモノノ外常ニ可能ナリ。

第二軌跡ノ直線ガ第一軌跡ノ圓ニ交ルトキ互ニ合同ナル四ツノ三角形ヲ得。

然レドモ此兩軌跡ガ相切スルトキハ所得ノ三角形ハ等脚トナリテ二ツナリ。又此兩軌跡ガ相會セザルトキハ解答ナシ。

問　　題

(1) 二定點ヨリ等距離ニアル點ヲ定直線,又ハ定圓周上ニ求メヨ。

(2) 二定點ヨリ等距離ニアリテ又二定直線ヨリモ等距離ニアル點ヲ求メヨ。

(3) 二定直線ヨリ夫々一定ノ距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

(4) 一定點ヲ通過シ,定直線又ハ定圓周中ノ定點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫ケ。

(5) 定直線ニ切シ他ノ定直線中ニ中心ヲ置クベキ既知半徑ノ圓ヲ畫ケ。

(6) 圓外ノ定點ヨリ割線ヲ引キ圓内ノ部分ト圓外ノ部分トヲ等シカラシメヨ。

(7) 既知ノ半徑ヲ有シ互ニ外方ニ在ル二定圓周ニ切スル圓ヲ畫ケ。

(8) 底邊ト高サト其中線トヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

(9) 底邊ト頂角ト底角ノ一トヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

(10) 底邊ト頂角ト頂點ヨリ底邊ニ引キタル中線トヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

(11) 平行線ニ切シ且一定點ヲ通過スベキ圓周ヲ畫ケ。

解析及總合

152. 作圖題ヲ解クニ當リ容易ニ其解法ヲ發見シ得ザルトキハ先之ヲ解キ得タルモノト假定シ,試ニ所要ノ圖形ヲ畫キ,然ル後補助ノ直線或ハ圓周ヲ加ヘ,以テ所要ノ圖形ヲ畫クニ必要ナルベキ條件ヨリ所設ノ條件ニ遡ル筋途ヲ考究シ,終ニ作圖ノ方法ヲ發見スルニ至ルカ,或ハ之ヲ嘗テ解シ得タル作圖題ニ歸セシムベシ。之ヲ作圖題ノ解析ト云フ。

解析ニ於テ得タル筋途ニ依リ解析ト全ク反對ノ順序ヲ以テ作圖ヲ進行スルトキハ終ニ所要ノ圖形ヲ得ルニ至ルベシ。之ヲ**總合**ト云フ。

一般ニ作圖題ヲ解スルニハ先解析ヲ施シテ所設ノ條件ト未知條件トノ關係ヲ明ニシ,次ニ之ヲ總合シテ作圖ノ方法ヲ作ルベシ。前者ハ進路ヲ指導シ後者ハ圖形ヲ實現スルモノナリ。故ニ解析ハ作圖ノ方法ヲ案出セシメ,總合ハ作圖ノ方法ヲ實施セシム。

[例題] 所設ノ二圓周O及O′ニ共通ナル切線ヲ

引ケ。

I. 共通外切線ノ場合。

[解析] 本題ヲ解シ得タリト假定シ, AB ヲ此切線ノ一トセヨ。小圓ノ中心 O ヨリ AB ニ平行ナル線 OC ヲ引キ, 大圓ノ半徑 O′B ト C ニ於テ交ラシムレバ OABC ハ矩形ナリ。故ニ O′C ハ兩半徑ノ差ニシテ, OC ハ兩半徑ノ差ヲ半徑トシ大圓ト同心ナル圓ニ切ス。由テ次ノ作圖ノ方法ヲ得。

[作圖] 大圓ノ中心ヲ中心トシ兩半徑ノ差ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ, 小圓ノ中心 O ヨリ此圓ニ切線 OC ヲ引キ (143), 次ニ O′C ヲ引キ大圓ト B ニ於テ會セシメ, O′B ニ平行ナル OA ヲ引キ AB ヲ連ヌルトキハ是レ所要ノ切線ナリ。

[證明] O′C ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シ。故ニ

CB ハ小圓ノ半徑 OA ニ等シ。而シテ OA ハ CB ニ平行ナリ。故ニ四邊形 AOCB ハ平行四邊形ナリ。而シテ角 OCO′ ハ直角ナリ。故ニ此四邊形ハ矩形ナリ。故ニ直線 AB ハ夫々兩圓ノ半徑 OA, O′B ノ端ニ於テ之ニ垂直ナリ。故ニ此直線ハ兩圓ニ切ス。

[吟味] 中心Oト補助圓トノ位置ニ依テ種々ノ場合ヲ生ズ。

兩圓ノ半徑ヲ r, r' トシ中心距離ヲ d トスレバ

$$d < r - r',$$
$$d = r - r',$$
$$d > r - r'$$

ナルニ従テ切線ノ數ハ 0, 1, 2 ナリ。故ニ本題ハ一定圓ガ全ク他ノ定圓ノ內部ニアレバ解答ナク內切スレバ一ツ,其他ノ場合ニハ常ニ二ツノ解答ヲ得。

II. **共通內切線**ノ場合。

前ト同樣ノ方法ニ由リ點OヨリO′ヲ中心トシ兩半徑ノ和ヲ半徑トセル補助圓ニ至ル切線ニ平行ナル直線ヲ引キ**共通內切線**ヲ畫クコトヲ得ベ

シ。此時ニハ

$$d < r + r',$$

$$d = r + r',$$

$$d > r + r'$$

ナルニ從テ切線ノ數ハ 0, 1, 2 ナリ。故ニ共通內切線ハ兩圓ガ全ク互ニ外方ニ在リテ相會セザルトキ二ツアリ,外切スレバ一ツトナリ,其他ノ場合ニ於テハ全クナシ。

注意。本節ノ例題ニ於テ見タル如ク作圖題ノ解法ニハ四ツノ段階ヲ分ツコトヲ得。解析ヲナサズシテ作圖ノ方法ヲ案出シ得ル場合ニハ此段階ヲ履マズシテ可ナリ。(但解析ガ單ニ作圖ノ方法ノ案出ヲ目的トスレバ之ヲ述ブルヲ要セズト雖他ニ之ヲ述ベザルベカラザル理由アリ。然レドモ稍困難ナルベケレバ茲ニハ其理由ヲ說明セズ)。

153. 前節ニ於テ行ヒタル解析ノ方法ハ所謂**累次代用法**ニシテ所設ノ作圖題ニ代用スルニ第二ノ作圖題ヲ以テシ,次ニ第三ノ作圖題ヲ代用シ逐ウテ此ノ如クシ,終ニ既知ノ作圖題或ハ直ニ解

シ得ベキ作圖題ニ至リテ止ムモノナリ。卽兩圓ノ共通切線ヲ引クコトハ之ヲ圓外ノ點ヨリ切線ヲ引クコトニ歸シ,而シテ此第二ノ作圖題ハ線分ヲ直徑トシテ圓ヲ畫クコトニ歸シタリ。

問　題

(1) 一定點ヲ通過シ相交ル二ツノ定直線ト等角ヲ爲スベキ直線ヲ引ケ。 (東商)

(2) 一定點ヲ通過シ他ノ二定點ヨリ等距離ニ在ルベキ直線ヲ引ケ。

(3) 定角内ノ定點ヲ通過シ此點ニテ二等分セラルヽ直線ヲ二邊ノ間ニ引ケ。 (神商)

(4) 二角及周圍ヲ知リテ三角形ヲ作レ。(商船)

(5) 定角BACノ一邊AB中ノ定點PヨリACへ直線PQヲ引キ角APQヲAQPノ三倍ニ等シカラシメヨ (東工)

(6) 所設ノ圓ニ外接シ,所設ノ三角形ト等角ナル三角形ヲ作レ。 (海機)

(7) 定直線中ノ定點ニ於テ之ニ切シ且定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。 (商船)

(8) 二ツノ同心圓ノ周ニテ三等分セラルベキ直線ヲ引ケ。

*(9) 相交ル二圓周ノ交點ノ一ヲ通過シテ割線ヲ引キ, [1] 圓周間ノ部分ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ, [2] 又最大ナラシメヨ。 (商船)

*(10) 定點ヲ通過シテ定圓周ヲ截ルベキ直線ヲ引キ圓內ノ部分ヲシテ與ヘラレタル線分ニ等シカラシメヨ。 (大豫·千醫)

第二篇 雜題

(1) 直角三角形ニ內切スル圓ノ直徑ハ直角ヲ夾ム二邊ノ和ト斜邊トノ差ニ等シ。 (音樂)

(2) 三角形ノ三邊ヨリ相等シキ弦ヲ截リ取ル圓ヲ畫ケ。 (東工·大豫)

(3) 所設ノ圓ノ直徑 AB ノ一端 A ヨリ任意ノ弦ヲ引キ其圓周ト會スル點 C ニ於テ切線ヲ引キ B ヨリ之ニ垂線ヲ引キ延長シテ AC ノ延長ト P ニ於テ交ラシム。 P 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(東工·專門)

(4) 所設ノ直線ト圓トニ切シ所設ノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫ケ。　(大豫)

(5) 對角線ト一邊トノ和或ハ差ヲ與ヘテ正方形ヲ作ルコト。　(商船)

(6) 定點ヨリ定直線ニ引キタル諸直線上ノ正三角形ノ頂點ノ軌跡如何。　(同上)

定直線ニ代フルニ定圓周ヲ以テセバ如何。

(7) 定マリタル圓Oノ圓周上ノ動點Pヨリ定マリタル直徑AOBニ垂線PCヲ引キOCニ等シク半徑OPヨリOQヲ取ルトキハQ點ノ軌跡如何。　(商船)

(8) 三角形ABCノ三邊BC, CA, ABノ上ニ各任意ニ一點D, E, Fヲ取レバ三ツノ三角形AEF BFD, CDEノ外接圓ハ一點ニ會ス。　(海機)

(9) 圓ノ直徑ABノ一端Aヨリ弦ACヲ引キ之ヲMマデ延長シテCMヲBCニ等シクスルトキハM點ノ軌跡如何。　(大豫)

(10) 圓ノ中心ニ於テ直角ニ交ル二ツノ直線ト其任意ノ切線トノ交點ヨリ其圓ヘ引ケル二ツノ切線ハ互ニ平行ナリ。　(東師)

(11) 一點Aヨリ圓Oヘ二ツノ切線AB, ACヲ引キB及Cニ於テ圓ニ切セシム。劣弧BC上ノ一點Dニ於テ切線ヲ引キAB及ACト夫々E及Fニ於テ交ラシム。然ルトキハ三角形AEFノ周及角EOFノ大サハD點ノ位置ニ關セズ不變ナリ。 (東工)

(12) AB, CDヲ所設ノ圓ノ二ツノ定マレル直徑トシE, Fヲ夫々圓周上ノ任意ノ一點PヨリAB, CDニ下セル垂線ノ足トスレバ直線EFノ長サハ一定ナリ。 (東師)

(13) 三角形ABCノ三邊BC, CA, ABト夫々D, E, Fニ於テ交ル直線ヲ引キ, D, E, Fヲ過ギ夫夫三邊BC, CA, ABニ垂直ナル直線ガ同一ノ點Pヲ通過スルトキハ此點Pハ三角形ABCノ外接圓ノ周上ニアリ。 (東師)

注意。 本題ハ *Simson* ノ定理(第104頁問題5)ノ逆ナリ。

(14) 二圓ガCニ於テ内切スルトキDニ於テ小圓ニ切スル大圓ノ弦ABヲ引ケバCDハ∠ACBヲ二等分ス.

(15) 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點 E ト A, B トヲ過ギル圓ニ切線 EF ヲ引ケバ EF ハ DC ニ平行ナリ。　　　　(專門)

(16) 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スルトキ其交點ヲ過ギテ一邊ニ垂直ナル直線ハ對邊ヲ二等分ス。　(*Brahmegupta*)　(陸士·商船·東工·山商)

(17) 定點 P ヨリ二直線 OX, OY ニ直線ヲ引キ其夾角ヲ直角ニシテ其長サヲ相等シカラシメヨ, 又此方法ハ二ツアルコトヲ示セ。　　　　(海機)

*(18) 所設ノ三角形ニ內接シテ定三角形ト合同ナル三角形ヲ畫ケ。

(19) 圓外ノ點 P ヨリ此圓ニ切線 PA, PB 及割線 PCD ヲ引キ, 又 A ヨリ CD ニ平行ナル弦 AE ヲ引キ弦 CD ノ中點ヲ F トセバ EF ト FB トハ一直線ヲ爲ス。　　　　(大工)

(20) 三角形ノ三ツノ垂線ハ夫々垂足三角形ノ各角ヲ二等分ス。　　　　(盛農)

*(21) 二圓ガ P ニ於テ相內切スルトキ直線 PXY ヲ引キ二圓ト夫々 X 及 Y ニ交ラシメ XY ヲ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。　　　　(東工)

第 三 篇

面 積

第 一 章

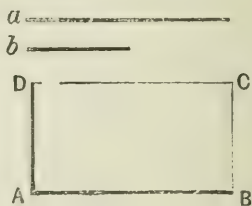
矩形ノ面積

154. **定義.** 多角形ノ**底**トハ其上ニ此多角形ガ立テリト考フル所ノ邊ナリ。

155. **定義.** 平行四邊形ノ**高サ**トハ底ト見做セル一邊ト其對邊トノ間ノ距離ニシテ,梯形ノ**高サ**トハ互ニ平行ナル兩邊ノ距離ナリ。

156. **定義.** **二線分ニテ夾ム(包ム)矩形**又ハ略シテ二線ノ矩形トハ此等ノ

二線分ニ等シキ二隣邊ヲ有スル矩形ナリ。

例ヘバ矩形 ABCD ヲ AB, BC ニテ夾ム矩形ト云フ。又其二隣邊 AB, BC ガ夫々二線分 a, b ニ等シキトキハ,之ヲ a, b ノ矩形ト云ヒ, AB·BC 又ハ ab ト記ス。

157. 定義. 一線上ノ正方形又ハ平方トハ此線分ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ヲ云フ。

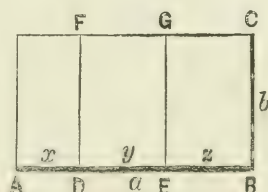
線分 a ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ノ面積ヲ表スニ a^2 ヲ以テシ,又 $\overline{AB}^2$ ハ線分 AB 上ノ正方形ヲ表ス。

注意. 本節及前節ノ記號ハ圖形ヲ示スモノニシテ,代數學ニ於ケル二數ノ乘積又ハ乘羃ト混同スベカラズ。

158. 定理一. 二隣邊ヲ等シクスル二ツノ矩形ハ合同ナリ。 (重置法)

系. 一邊ヲ等シクスル二ツノ正方形ハ合同ナリ,逆ニ相等シキ二ツノ正方形ノ邊ハ相等シ.

159. 定理二. 二線分ニテ夾ム矩形ハ其一ト,他ノ線分ヲ分チタル諸部分トニテ夾ム矩形ノ和ニ等シ。

[假設] a, b ヲ二線分トシ,a ヲ x, y, z ナル部分ニ分チタリトス。

[終結]

$ab=xb+yb+zb$。

[證明] 二隣邊 AB, BC ガ夫々二線分 a, b ニ等シキ矩形 ABCD ヲ畫キ, AB ヲ D, E ニ於テ x, y, z ニ等シク分ツ。而シテ分點 D, E ヨリ AB ニ垂線 DF, EG ヲ引ケバ AF, DG, EC ハ矩形ナリ。

而シテ　　▭AC=AF+DG+EC。

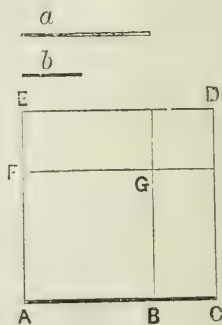
∴　　$ab=xb+yb+zb$。

系．<u>一線分ト他ノ二線分ノ差トノ矩形ハ前ノ一線分ト後ノ二線分トノ矩形ノ差ニ等シ。</u>

160．定理三． 二線分ノ和ノ上ノ正方形ハ其正方形ノ和ニ其矩形ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

［假設］ a, b ヲ二線分トス。

［終結］ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$。

［證明］ 無限直線上ニ於テ AB$=a$, BC$=b$ ヲ取リ其和 AC ノ上ニ正方形 AD ヲ畫キ，邊 AE 上ニ於テ AF$=a$ ヲ取リ，B, F ヨリ AB, AF ニ垂線ヲ引ケバ，此二線ハ G ニ於テ直交シ全形ヲ四部ニ分ツ。然ラバ

$$AG=a^2,\ DG=b^2,\ CG=EG=ab.$$

而シテ　$\square AD=AG+DG+CG+EG.$

$$\therefore\quad (a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

系. 直線上ノ正方形ハ其半ノ上ノ正方形ノ四倍ニ等シ。

問題

(1) $ab+b^2=(a+b)b$ 及 $ab-b^2=(a-b)b$ ノ幾何學上ノ意味ヲ述ベ且之ヲ證明セヨ。

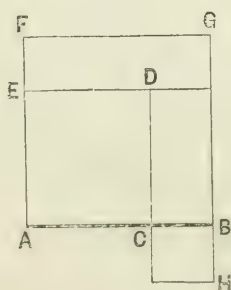
(2) 有限直線ヲ三分スレバ全線上ノ正方形ハ各分上ノ正方形ト各二分ノ夾ム矩形ノ二倍トノ和ニ等シ。

161. 定理四. 二線分ノ差ノ上ノ正方形ハ其正方形ノ和ヨリ其矩形ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ。

[假設] a, b ヲ二線分トス。

[終結]

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$。

[證明] 無限直線上ニ於テ AB$=a$, BC$=b$ ヲ取リ其差 AC ノ上ニ正方形 AD ヲ畫キ邊 AE ノ延長上

ニ於テ AF=a ヲ取リ, B, F ヨリ AB, AF ニ垂線ヲ引ケバ此二線ハ G ニ於テ直交ス。
次ニ BC ノ上ニ正方形 CH ヲ畫ク。然ラバ

$AG=a^2$, $CH=b^2$, $DH=EG=ab$。

而シテ □AD=AG+CH−DH−EG。

$\therefore\quad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$。

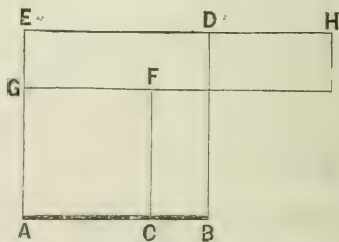
162. 定理五. 二線分ノ上ノ正方形ノ差ハ其二線分ノ和ト差トノ矩形ニ等シ。

[假設] a, b ヲ二線分トス。

[終結] $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

[證明] AB=a, AC=b トシ其上ニ □AD, AF ヲ同側ニ畫キ ED ヲ H マデ延長シ DH=AG ナラシメ ▭GH ヲ畫ク。

然ラバ ▭GH=$(a+b)(a-b)$。

然ルニ □AD−AF=▭DG+BF=GH。

$$\therefore \quad a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

系. 一線分ヲ二分スルトキ其矩形ハ其線分ノ半分ノ上ノ正方形ト中點ヨリ分點ニ至ル距離ノ上ノ正方形トノ差ニ等シ。

注意。 以上數個ノ定理ハ全ク代數學ノ公式ト符合スルヲ見ルベシ。然レドモ其意義ハ異ナレリ。

問題

(1) 二線分ノ和ノ平方ハ差ノ平方ヨリモ其二線分ノ矩形ノ四倍ダケ大ナリ。

(2) 線分ABヲCニテ二等分シDニテ任意ニ分ツトキハ $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{CD}^2$ ナリ。

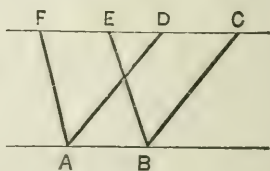
(3) 有限直線ヲ二分シテ其平方ノ和ヲ最小ナラシムルコト如何。

(4) 周圍ガ相等シキ矩形ノ中,正方形ガ最大ナル面積ヲ有ス。　(商船)

第二章

平面形ノ面積

163. **定理六.** 同底(AB)ヲ有シ且同平行線ノ間ニ在ル兩平行四邊形(ABCD, ABEF)ハ相等シ。

[證明] △FAD及EBCハ二邊及其夾角ヲ等シクス，故ニ合同ナリ。今此兩形ヲ全圖形ABCFヨリ引キ去ルトキハ夫々▱ABCD及ABEFヲ得。故ニ此兩平行四邊形ハ相等シ。

系一. 等底等高ノ平行四邊形及矩形ハ皆等積ナリ。

系二. 等底(又ハ等高)ノ平行四邊形ノ中ニテ高サ(又ハ底)ノ大ナルモノガ大ナル面積ヲ有ス。

164. 定理七. 三角形ハ等底等高ノ矩形ノ半ニ等シ。

系. 等底等高ノ兩三角形ハ等積ナリ。逆モ亦眞ナリ。

問題

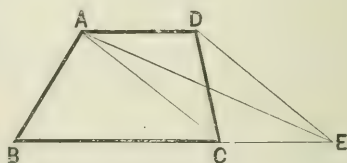
(1) 二ツノ三角形ガ同底等積ナルトキ其頂點ヲ連ヌル直線ハ底ニ平行ナルカ,又ハ底ニテ二等分セラル。

(2) 三角形ノ二邊ノ中點ヲ連ヌル線分ヲ底トシ其底邊中ニ對邊ヲ有スル平行四邊形ハ全形ノ半ニ等シ。又之ニ依リテ四邊形ノ四邊ノ中點ヲ連ネテ成レル平行四邊形ハ本形ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ。

(3) 四邊形ノ兩對角線ガ直交スルトキ其對角線ノ夾ム矩形ハ本形ノ二倍ニ等シ。

(4) ABC ヲ所設ノ三角形トセバ △PAB 及 PAC ノ和ガ一定ノ面積ヲ有スル如キ P 點ノ軌跡如何。

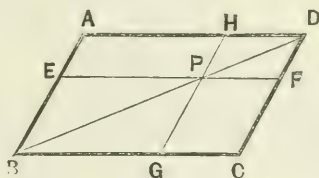
165. 定理八. 梯形ハ之ト等高ニシテ其兩底ノ和ニ等シキ底ヲ有スル三角形ニ等シ。

[證明] ABCD ヲ梯形トシ, D ヨリ對角線 AC ニ平行ナル線 DE ヲ引キ, BC ノ延長ト E ニ於テ會セシメ AE ヲ引クトキハ △ACD = ACE (164系)。故ニ △ABE ハ梯形 ABCD ト同高ニシテ其底邊 BE ハ梯形ノ兩底ノ和ニ等シク,而シテ其面積ハ相等シ。

166. 定理九. 平行四邊形 (ABCD) ノ對角線 (BD) 中ノ一點 (P) ヲ過ギ二隣邊ニ平行ナル直線 (EF, GH) ヲ引クトキ此對角線ノ兩側ニ生ズル平行四邊形 (FA, PC) ハ相等シ。

[證明] 平行四邊形ノ對角線ハ之ヲ合同ナル兩三角形ニ分ツ。即

△ABD≡CDB,

△EBP≡GPB,

△HPD≡FDP。

第一式ヨリ第二式ト第三式トノ和ヲ引キ去レバ ▱PA=PC ヲ得。

注意。 上ノ圖ニ於テ EG, FH ヲ**對角線BDニ沿ヘル平行四邊形**ト云ヒ, PA, PC ヲ**其餘形**ト,云フ。

問題

(1) 梯形ノ平行ナラザル一邊ヲ底トシ對邊ノ中點ヲ頂點トセル三角形ハ本形ノ半分ニ等シ。

(2) 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ニアラザル點ヲPトセバ, $\triangle APC = \frac{1}{2}(\text{▱}PB \sim \text{▱}PD)$. (商船)

(3) 梯形ノ對角線ノ交點ハ平行ナル二邊ニ平行ナル線分ノ中點ナリ。

167. 定理十. 直角三角形ニ於テ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。 (*Pythagoras*)

[假設] 三角形 ABC ニ於テ A ヲ直角トス。

[終結] $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$。

[證明] AB, AC, BC ノ上ノ正方形ヲ ABDE, ACFG, BCKH トシ, A ヨリ BH ニ平行ナル線 AM ヲ引キ AH, DC ヲ連ヌルトキハ

□AD＝2△DBC,

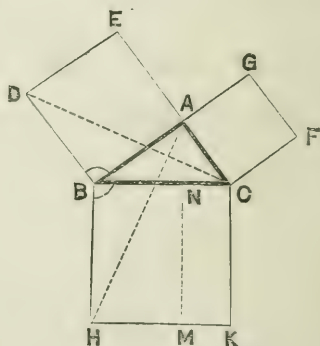
▭BM＝2△ABH。

然ルニ △DBC, ABH ハ二邊及其夾角ヲ等シクスル故合同ナリ。

∴　　□AD＝▭BM。

同様ニ　　□AF＝▭CM。

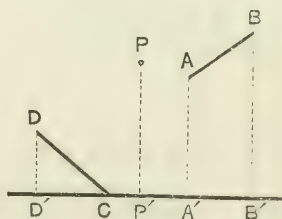
∴　　□BCKH＝ABDE＋ACFG。

∴　　$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.

系一. 直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ下セル垂線ニテ分タレタル斜邊ノ一部分ト斜邊トノ矩形ハ此部分ニ隣レル邊ノ上ノ正方形ニ等シ。

系二. 直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ下セル垂線ノ上ノ正方形ハ斜邊ノ二部分ノ矩形ニ等シ(160)。

系三. 正方形ノ對角線上ノ正方形ハ本形ノ二倍ニ等シ。

168. 定義. 直線上ニ投ズル或**點ノ正射影**トハ此點ヨリ其直線ニ下セル垂線ノ足ナリ。

直線上ニ投ズル**線分ノ正射影**トハ此線分ノ兩端ヨリ其直線ニ下セル垂線ノ足ノ間ノ線分ナリ。

圖ニ於テ點PノiE射影ハP′ニシテ線分AB,CD

ノ正射影ハ A′B′, CD′ ナリ。

注意。正射影ノ外種々ノ射影アリト雖本書ニ於テハ正射影ノミヲ考究ス。故ニ爾後單ニ射影ト云ハヾ正射影ヲ指スモノト知ルベシ。

問題

(1) 平行ニシテ等長ナル二線分ノ同一直線上ニ投ズル射影ハ相等シ。

(2) 或線分ト其射影トガ相等シキコトアルカ。又線分ノ射影ガ點トナルコトアルカ。

(3) 直角三角形ノ一鋭角ガ他ノ鋭角ノ二倍ナルトキハ大ナル邊ノ上ノ正方形ハ小ナル邊ノ上ノ正方形ノ三倍ニ等シ。 (海機)

(4) 四邊形 ABCD ノ對角線ガ直交スルトキ

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2.$$

169. 定理十一. 鈍角三角形ニ於テ，其鈍角ノ對邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ大ナルコト，

其一邊ト其上ニ投ズル他ノ邊ノ射影トノ夾ム矩形ノ二倍ナリ。

[假設] $\triangle ABC$ ニ於テ A ヲ鈍角, CD ヲ垂線トス

[終結] $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB.AD$。

[證明] 角 BAC ハ角 D ヨリ大ナル故 CD ハ三角形外ニ在ルベシ。

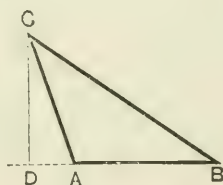
$\therefore \quad BD=BA+AD$,

$\therefore \quad \overline{BD}^2=\overline{BA}^2+\overline{AD}^2+2BA.AD$, (160)

又 $\quad \overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$,

$\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AC}^2$。

上ノ三式ヲ邊々相加ヘ兩邊ヨリ共通ノ量ヲ引キ去レバ

$\overline{BC}^2=\overline{BA}^2+\overline{AC}^2+2BA.AD$。

170. 定理十二. 三角形ニ於テ,銳角ノ對邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルコト,其一邊ト此邊上ニ投ズル他ノ邊ノ射影トノ夾ム矩形ノ二倍ナリ。(161)

系一. 三角形ノ一邊上ノ正方形ガ他ノ二邊上ノ正方形ノ和ヨリ大ナルカ,又ハ等シキカ,又ハ小ナルカニ從テ其對角ハ鈍角ナルカ,直角ナルカ又ハ鋭角ナリ.

系二. 三角形ノ二邊上ノ正方形ノ和ハ半底上ノ正方形ト底ニ至ル中線上ノ正方形トノ和ノ二倍ニ等シ。

系三. 三角形ノ二邊上ノ正方形ノ差ハ底邊ト此上ニ投ズル其中線ノ射影トノ夾ム矩形ノ二倍ニ等シ。

問 題

(1) 二定點ヨリノ距離ノ上ノ正方形ノ和ガ一定不易ナル點ノ軌跡ハ圓ナリ。

(2) 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ一定不易ナル點ノ軌跡ハ直線ナリ。 (陸士)

(3) 等脚三角形 ABC ノ底邊 AB 上ノ一點ヲ P トスレバ $\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=AP.BP$。 (商船.山商)

又 P ガ底ノ延長上ニアルトキハ如何.

(4) 平行四角形ノ四邊上ノ正方形ノ和ハ兩對角線上ノ正方形ノ和ニ等シ。 (大工.海機)

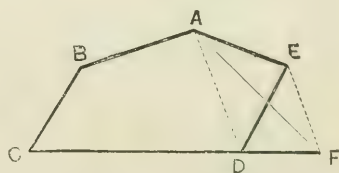
(5) 四邊形ノ對角線上ノ正方形ノ和ハ對邊ノ中點ヲ結ブ直線上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シキコトヲ證セヨ。 (大豫)

(6) 二等邊直角三角形 ABC ニ於テ D ヲ斜邊 BC 上ノ任意ノ點トスレバ

$$2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2。$$ (陸士)

(7) 任意ノ一點ヨリ矩形ノ對角頂ニ引ケル直線上ノ正方形ノ和ハ相等シ。 (海機)

171. 作圖題一. 所設ノ多角形ト等積ナル三角形ヲ作レ。

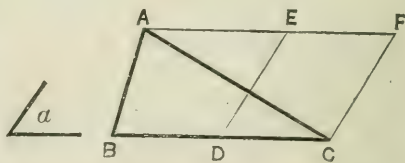
[作圖] ABCDE ヲ所設ノ多角形トシ,對角線 AD ニ平行ナル直線 EF ヲ引キ CD ノ延長トFニ會セシメ AF ヲ連ヌ。而シテ又對角線 AC ニ由リテ同法ヲ行ヒ,斯クシテ終ニ所要ノ三角形ヲ得。

[證明] EF∥AD ナルヲ以テ △ADE=ADF。

∴ ABCDE=ABCF.

是ニ由テ此法ヲ繰返セバ如何ナル多角形モ一回ニ一邊ヅヽ減ジタル等積ノ多角形ニ變ゼラレ終ニハ三角形トナル。

[吟味] 作圖ハ常ニ可能ナリ。而シテ解答ノ數ハ無限ニ多シ。

172. 作圖題二. 所設ノ三角形ト等積ニシテ所設ノ角ヲ有スル平行四邊形ヲ作レ。

[作圖] ABC ヲ所設ノ三角形トシ α ヲ所設ノ角トス。A ヨリ BC ニ平行ナル直線 AF ヲ引キ, BC ノ中點ヲ D トシテ ∠CDE=α ナラシメ CF∥DE ヲ引キテ AF ト會セシム。然ルトキハ DF ガ所要ノ平行四邊形ナリ。

[證明] 學ブ者之ヲ爲スベシ.

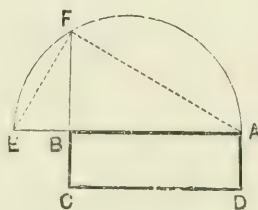
173. 作圖題三. 所設ノ矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ。

[作圖] ABCD ヲ所設ノ矩形トス。

AB ヲ延長シ BE=BC ナラシメ AE ヲ直徑トスル半圓ヲ畫キテ CB ノ延長ト F ニ於テ交ラシムレバ BF ガ所要ノ正方形ノ一邊ナリ。

[證明] ∠AFE ハ直角ナルヲ以テ

$\overline{BF}^2 = AB.BE$ (167 系二)

$= ▭AC$。

問題

(1) 所設ノ平行四邊形ト等積ニシテ所設ノ角ヲ有スル平行四邊形ヲ作レ。

(2) 所設ノ三角形ト等積ニシテ所設ノ一邊ヲ有スル矩形ヲ作レ。

(3) 若干ノ正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作レ。

(大豫·東商·農實·七高)

(4) 二ツノ正方形ノ差ニ等シキ正方形ヲ作レ。

(盛農)

(5) 三角形ノ一邊中ノ定點ヲ過ギ面積ヲ二等分スル直線ヲ引ケ。 (大豫・札農・商船・仙醫)

第三章

面積ノ計算

174. 或量Aガ之ト同種ノ量Bノ若干倍ニ等シキトキハAヲBノ**倍量**ト云ヒ,BヲAノ**約量**ト云フ。

同種ノ二量A及Bノ**公約量**トハ同時ニA及Bヲ倍量トセル第三ノ量ナリ。

二量ガ公約量ヲ有スルトキハ之ヲ**通約スベシ**ト云ヒ,然ラザレバ之ヲ**通約スベカラズ**ト云フ。

或量ヲ**計ル**トハ之ト同種ノ量ヲ**單位**ト定メ,其量ガ此單位又ハ此單位ノ若干分ヲ幾倍含メルカヲ檢定スルコトヲ云フ。

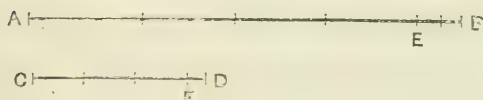
數トハ或量ト其單位トノ比較ノ結果ナリ。

或量ガ單位ヲ丁度幾ツカ含ムトキ其量ヲ表ス

數ハ**整數**即**完全數**ニシテ,單位ノ若干分ノ一ヲ幾ツカ含ムトキハ其數ハ**分數**ナリ。整數及分數ヲ通稱シテ**有理數**又ハ**盡數**ト云フ。

或量ト單位トガ公約量ヲ有セザルトキハ此量ヲ整數又ハ分數ニテ表スコトヲ得ズ,之ヲ表ス數ヲ**無理數**又ハ**不盡數**ト云フ。

或量ノ測度又ハ數値トハ或單位ニテ此量ヲ表シタル數ナリ。

175. 作圖題四. 所題ノ二線分(AB, CD)ノ長サノ最大公約量ヲ求メヨ。

[作圖] AB>CDトセバ所要ノ公約量ハCDヨリ大ナラザルモ之ニ等シキコトヲ得ルコト明ナリ。CDヲAB中ニ出來得ルダケ多ク取ルトキ例ヘバABガ丁度CDノ四倍ヲ含ムトセバCDハ所要ノ最大公約量ニシテCDヲ單位トセバABノ測度ハ整數4ナリ。

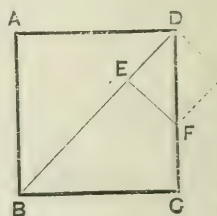
若 AB ガ CD ノ四倍ト殘リ EB ヲ含ムトセバ EB ヲ CD 中ニ取リ得ルダケ取ルベシ,而シテ CD ガ EB ヲ三倍ト殘リ FD トヲ含ムトセバ FD ヲ前ノ如ク EB 中ニ取ルベシ,然ルトキ EB ガ丁度 FD ノ二倍ヲ含ミテ殘リナケレバ FD ハ所要ノ最大公約量ナリ。而シテ

$$CD = 7\,FD,\quad AB = 30\,FD$$

ナル故 CD ヲ單位トスルトキ AB ノ測度ハ分數 $\frac{30}{7}$ ナリ.

注意。上ノ方法ノ證明ハ算術又ハ代數學ニ於ケル最大公約數ヲ求ムル場合ト同樣ナリ。

上ノ方法ガ終リ無ケレバ二線ハ通約スベカラザル量ナリ。

ABCD ヲ正方形トセヨ。對角線 BD 中ニ BE=BC ヲ取リ, E ヨリ BD ニ垂線 EF ヲ引ケバ

$$DE = EF = FC$$

ナリ,卽 DF, DE ハ第二ノ正方形ノ對角線ト一邊トナリシノミ。故ニ何程上ノ方法ヲ行フト

モ殘リハ盡クルコトナシ。是ニ由リテ

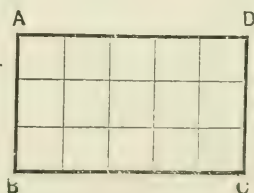
正方形ノ邊ト對角線トハ通約スベカラズ。

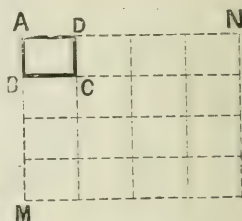
卽邊ヲ單位トスルトキ對角線ヲ表ス數ハ不盡數ナリ。

176. 定理十三. 矩形ノ面積ノ測度ハ其二隣邊ノ測度ノ乘積ニ等シ。

[假設] ABCD ヲ矩形トシ,其二邊 AB, AD ハ同一ノ長サノ單位ニテ計ラレ且此長サノ單位ノ上ノ正方形ノ面積ヲ面積ノ單位ト爲シ ABCD, AB, AD ノ測度ヲ夫々 S, a, b トス.

[終結] S$=ab$。

[證明] a, b ヲ整數トス。此場合ニ於テハ AB ヲ a 等分シ, AD ヲ b 等分シ,分點ヨリ二隣邊ニ平行ナル直線ヲ引ケバ矩形 ABCD ハ明ニ ab 個ノ面積ノ單位ニ分タル.

$$\therefore \quad S = ab。$$

II. a, b ヲ分數トセヨ, 即 $a=\frac{p}{m}$, $b=\frac{q}{n}$ トセヨ。AB, AD ヲ夫々 M, N マデ延長シテ AM$=m$. AB, AN$=n$. AD ナラシムルトキ矩形 AM. AN ハ ABCD ノ mn 倍ニシテ其測度ハ pq ナリ。故ニ上ノ場合ニヨリテ

$$mn\,S=pq.$$

$$\therefore\quad S=\frac{pq}{mn}=\frac{p}{m}\cdot\frac{q}{n}=ab.$$

注意。a, b ノ中何レカ一ツガ整數ニシテ他ガ分數ナル場合ハ讀者自ラ之ヲ證明スベシ。

又 a, b ノ中何レカ一ツガ整數ニシテ他ガ不盡數ナル場合,又ハ何レカ一ツガ分數ニシテ他ガ不盡數ナル場合又ハ共ニ不盡數ナル場合ハ困難ナレバ此處ニハ其證明ヲ省略ス。

此定理ヲ次ノ如ク略述スルヲ常トス。

矩形ノ面積ハ其二隣邊ノ乘積ニ等シ。

系一。正方形ノ面積ハ其一邊ノ二乘冪ニ等

シ。

注意。此理ニ由リテ或數ノ二乘冪ヲ其平方ト云フ(157)。

系二. 正方形ノ一邊ノ測度ヲ a トスレバ對角線ノ測度ハ $a\sqrt{2}$ ナリ。

系三. 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ乘積ニ等シ。

系四. 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ乘積ノ半ニ等シ。

系五. 梯形ノ面積ハ兩底ノ和ト高サトノ乘積ノ半ニ等シ。

問　　題

(1) 三角形 ABC ノ三邊ノ測度ヲ a, b, c トシ A ヲ直角トスレバ

$$a^2=b^2+c^2, \qquad b=\sqrt{(a+c)(a-c)}。$$

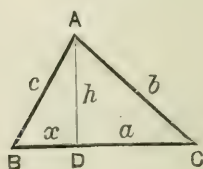
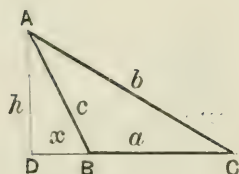
(2) 梯形 ABCD ニ於テ AB＝5尺, 上底 BC＝24尺, 下底 AD＝27尺ニシテ角 D ハ直角ナリ, 面積ヲ求メヨ。

(3)　三角形ABCニ於テ $a=3, b=4, c=6$ ナラバ角Cハ鈍角ナリ。

(4)　正三角形ノ一邊ノ測度ガ a ナルトキ其高サ及面積ヲ求メヨ。

177. 三角形ノ三邊ヲ以テ其面積ヲ表ス公式。

三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ヲ夫々 a, b, c ニテ表ハシ, A ヨリ對邊 BC 或ハ其延長ヘ垂線 AD ヲ引キ BD ヲ x ニテ表ハセバ

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\pm 2\,BC.\,BD.$$

卽　　$$b^2=c^2+a^2\pm 2ax,$$

$$\therefore \quad \pm x=\frac{b^2-c^2-a^2}{2a}。$$

垂線 AD ノ長サ卽高サヲ h ニテ表ハセバ

$$h^2=c^2-x^2=(c+x)(c-x)$$
$$=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$
$$=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)。$$

但　$2s=a+b+c$ ナリトス。

$$\therefore\quad S=\frac{ah}{2}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。\qquad (Hero)$$

問　題

(1)　三角形ノ三邊ノ長サガ夫々6間,11間,7間ナルトキ面積ヲ求メヨ。

(2)　三角形ノ三邊ノ長サガ夫々7尺,8尺,10尺ナリ。最小邊ニ引キタル垂線ノ長サヲ求メヨ。

(3)　$\triangle ABC$ ノ内接圓及傍接圓ノ半徑ノ測度ヲ夫々 r, r', r'', r''' トスレバ

$$S=sr=(s-a)r'=(s-b)r''=(s-c)r'''。$$

(4)　三邊ヲ a, b, c トシテ三角形ノ中線ノ長サヲ表セヨ。

(5)　正三角形ト正方形トアリ,其周圍ガ相等シキトキ面積ハ何レガ大ナルカ。　(海機)

(6)　$S^2=rr'r''r'''$。之ヲ證明セヨ。

第三篇　雜題

(1) 所設ノ四邊形又ハ五邊形ノ一頂點ヨリ直線ヲ引キ其面積ヲ二等分セヨ。

(2) 三角形ノ一邊上ニアル一點ヨリ二直線ヲ引キ此三角形ヲ三等分セヨ。　(海兵)

(3) AB ノ上ニ立ツ二ツノ三角形 ABC, ABD ノ頂點 C, D ヲ結ビテ其中點ヲ E トセバ三角形 ABE ハ兩三角形 ABC, ABD ノ和若クハ差ノ半分ニ等シ。　(商船)

(4) 兩三角形ノ頂角,底邊及面積ガ互ニ相等シキトキハ此兩三角形ハ全ク相等シ。　(海兵)

(5) 所設ノ平行四邊形ニ等シクシテ所設ノ底邊ヲ有スル二等邊三角形ヲ作レ。　(大豫)

(6) 線分 AB ヲ C ニ於テ $\overline{AC}^2 = 2\overline{CB}^2$ ナル如ク分ツトキハ $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2 = 2AB.AC$.

(7) 圓ノ直角ニ交ル兩弦ノ其交點ニ於テ分タレタル四ツノ部分ノ上ノ正方形ノ和ハ直徑上ノ正方形ニ等シ。　(商船)

(8) 圓ノ直角ニ交ル兩弦ノ上ノ正方形ノ和ハ半徑上ノ正方形ノ八倍ヨリ中心ト其兩弦ノ交點トヲ結ブ直線上ノ正方形ノ四倍ヲ減ジタルモノニ等シ。 (大豫)

(9) 定圓Oヘノ切線及定點Aヘノ距離ガ相等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。 (陸士)

(10) 三角形ノ三ツノ高サヲ a', b', c' トシ, r ヲ內接圓ノ半徑トスレバ

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}。$$ (一年志願)

(11) 定圓ニ內接スル矩形ノ中其面積ノ最大ナルハ正方形ナリ。 (海機)

(12) △ABC ノ形內ニ一點 P ヲ設ケテ △APB BPC, CPA ノ積ノ比ヲシテ 1:2:3 ノ如クセヨ。

(商船)

(13) 三角形ノ底 210尺, 他ノ邊ハ 105尺及 135尺ナリ底ニ至ル中線ノ長サヲ求メヨ。

(14) 四邊形ノ二ツノ對角線ノ長サ及對角線ガナス角ガ一定ナルトキハ四邊形ノ面積モ亦一定ナルコトヲ證セヨ。 (大豫)

第四篇

比例

第一章

比及比例

178. 定義. 或量Aノ之ト同種類ノ量Bニ對スル**比**トハBヨリAヲ得ル爲ニBニ乘ズベキ數ナリ。

AノBニ對スル比ヲ$\dfrac{A}{B}$又ハ$A:B$ト記ス。

二量A,Bヲ比ノ**項**ト云ヒ,Aヲ比ノ**前項**ト云ヒ,Bヲ**後項**ト云フ。

或量Aノ之ト同種類ノ量Bニ對スル**比**トハBヲ單位トセルトキAヲ表ス數ナリト換言スルコトヲ得。

例ヘバ一間ノ一尺ニ對スル比ハ6ニシテ,正方形ノ對角線ト其邊トノ比ハ$\sqrt{2}$ナリ。

又kヲ任意ノ正數トスレバAノBニ對スル比ハkAノkBニ對スル比ニ等シ。

注意。同種類ノ量ニ非ザレバ比ヲ有セズ,例ヘバ長サト面積トノ如キハ比較スル能ハズ。

179. 定義. 量AノBニ對スル比ガ他ノ量CノDニ對スル比ニ等シキトキ此等ノ四量ハ**比例**ヲ爲スト云ヒ且之ヲ**比例量**ト云フ。

四量A, B, C, Dガ比例ヲ爲ストキハ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

ニテ其比例ヲ表ス。又此比例ヲ

$$A:B=C:D,$$

或ハ

$$A:B::C:D$$

ト記ス。

AトDトヲ比例ノ**外項**ト云ヒ,BトCトヲ其**内項**ト云フ。又DヲA,B,Cノ**第四比例項**ト云ヒ;AトCト若クハBトDトハ**相對應**スト云フ。

注意。 AトBト,若クハCトDトハ同種類ノ量ナラザルベカラザルモAトCトハ必ズシモ同種類ノ量ニアラズ。

180. 定義. 同種類ノ三量A, B, CアリテAノBニ對スル比ガBノCニ對スル比ニ等シキトキ此等ノ三量ハ比例ヲ爲スト云ヒ, CヲA及Bノ**第三比例項**ト云ヒ, BヲAトCトノ**比例中項**ト云フ。

181. 定義. 或比ト其兩項ヲ交換シテ成レル比トハ互ニ**反比**ナリト云フ。

例ヘバ$\frac{A}{B}$及$\frac{B}{A}$ノ如シ。故ニ

或比ト其反比トノ積ハ1ニ等シ。

182. 定理. 量AノBニ對スル比ハ之ヲ同單位ニテ計ルトキ, Aノ測度aヲBノ測度bニテ除シタル商ニ等シ。

[證明] Cヲ共通ノ單位トスレバ

$$A=aC, \qquad B=bC$$

ナル故 $C=\frac{1}{b}B$。從テ $A=\frac{a}{b}B$。

$$\therefore\quad \frac{A}{B}=\frac{a}{b}。$$

此定理ニ由リテ觀レバ量ノ比ハ其測度ノ比ニ等シキヲ以テ量ノ比ヲ研究スルニ數ノ比ヲ代用スルコトヲ得ベシ。換言スレバ數ノ比ニ就テ得タル事項ハ直ニ量ノ比ニ就テ得ベキ事項ナリト知ルベシ。

今重要ナル定理ヲ下ニ揭グ。但 a, b, c, d ハ任意ノ正數ヲ表スモノトス。

[1] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $a \gtreqless b$ ニ從テ $c \gtreqless d$。

[2] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ 及 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$。

[3] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d} \text{ 及 } \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}。$$

[4] $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\cdots\cdots$ ナルトキハ

$$\frac{a}{b}=\frac{a+a'+a''+\cdots\cdots}{b+b'+b''+\cdots\cdots}。$$

此等ノ諸定理ハ容易ニ證明スルコトヲ得。例ヘバ[3]ヲ證明スルニハ所設ノ比例ノ兩邊ニ1ヲ

加ヘ又ハ減ズベシ。

又[5]ヲ證明センニハ等比ヲ r ニテ表シ,

$$a=br,\quad a'=b'r,\quad a''=b''r,\ldots\ldots$$

邊々相加フレバ

$$a+a'+a''+\cdots\cdots=(b+b'+b''+\cdots\cdots)r。$$

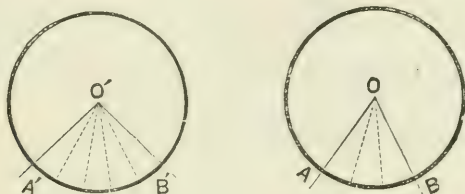
$$\therefore\quad \frac{a+a'+a''+\cdots\cdots}{b+b'+b''+\cdots\cdots}=r.$$

此等ノ數ノ比ニ關スル定理ハ之ヲ其儘量ノ比ニ關スル定理ニ改ムルコトヲ得. 但量ノ種類ノ異同ヲ考フベシ.

第二章

中心角

183.　定理一.　同圓或ハ等圓ニ於テ二ツノ中心角 (AOB, A′O′B′) ノ比ハ其夾弧 (AB, A′B′) ノ比ニ等シ。

(二角ガ通約スベキ場合ノミヲ證明シ,二角ガ通約スベカラザル場合ハ困難ナレバ省略ス,定理二モ之ニ倣フ).

[證明] 角 AOB, A′O′B′ ノ公約量ヲ求メ角 AOB ハ其公約量ノ三倍ニ等シク A′O′B′ ハ其五倍ニ等シトスレバ

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{3}{5}.$$

又 AOB ヲ三等分シ A′O′B′ ヲ五等分シ得タリトスレバ弧 AB, A′B′ モ亦同様ニ等分セラル.

$$\therefore \quad \frac{弧AB}{弧A'B'}=\frac{3}{5}.$$

$$\therefore \quad \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{弧AB}{弧A'B'}.$$

系一. 圓ノ中心ニ於テ單位角ヲ作レル弧ヲ單位弧トスレバ中心角ハ其夾弧ト同測度ヲ有ス.

故ニ圓周ノ三百六十分ノ一ヲ度ト云ヒ,度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ分ト云ヒ,分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ秒ト云フコト角ニ於ケルガ如シ。

系二。 內接角ハ其夾弧ノ半ト同測度ヲ有ス

系三. 切線ト切點ヲ過グル弦トガ爲ス角ハ角內ノ弧ノ半ト同測度ヲ有ス。

問　題

(1) 圓內ニ頂點ヲ有スル角ハ此角ノ二邊ニテ夾メル弧及其對頂角ノ二邊ニテ夾メル弧ノ和ノ半ト同測度ヲ有ス。　(海兵.一年志願)

角ノ頂點ガ圓外ニアリテ二邊ガ圓ニ交ル場合ハ如何。

(2) 一點ヨリ出ヅル二ツノ切線ガナス角ノ測度ハ共軛弧ノ測度ノ差ノ半分ナリ。

其一ガ割線トナリシ場合ハ如何。

(3) 圓周ノ $\frac{1}{n}$ ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角及內接角ノ度數ヲ表ス公式ヲ作レ。

(4) 圓周ヲ 11 ト 13 トノ比ニ分ツコト如何。

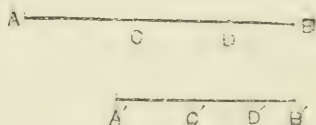
(陸士)

第三章

比例線

184. 定義. 或線分ノ部分ノ比ガ他ノ線分ノ對應セル部分ノ比ニ等シキトキ此二線分ハ**相似**ニ分タレタリト云フ。

例ヘバ $\frac{AC}{CD}=\frac{A'C'}{C'D'}$

及 $\frac{CD}{DB}=\frac{C'D'}{D'B'}$

ナルトキ AB, A′B′ ハ相似ニ分タレタルナリ。内項ヲ交換スレバ

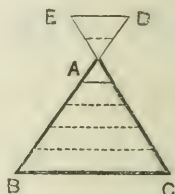
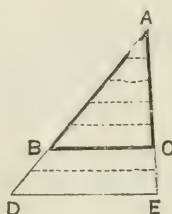
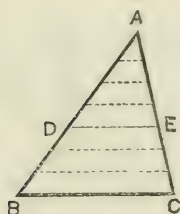
$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DB}{D'B'}$$

ヲ得。又之ヲ次ノ如ク記スコトアリ。

$$AC : CD : DB = A'C' : C'D' : D'B'.$$

斯ノ如キ場合ニハ又明ニ次ノ關係アリ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{AD}{A'D'}.$$

185. **定理二.** 三角形(ABC)ノ底(BC)ニ平行ナル直線(DE)ハ二邊ヲ相似ニ內分又ハ外分ス。 (*Thales*)

[證明] DAトDBトノ公約量ヲ求メ,DAハ其公約量ノ m 倍ニ等シク,DBハ其 n 倍ニ等シトスレバ

$$\frac{DA}{DB}=\frac{m}{n}.$$

但 m, n ハ整數ナリ。

DAヲ m 等分シ,DBヲ n 等分シ,各分點ヲ過ギテ底BCニ平行ナル線ヲ引クトキ此等ノ線ハEAヲ m 等分シECヲ n 等分スベシ (96)。

$$\therefore \quad \frac{EA}{EC}=\frac{m}{n},$$

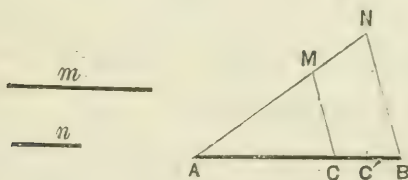
$$\therefore \quad \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}.$$

問　題

(1) 長サ1間ノ棒ヲ7:5:3ノ比ニ分ツトキ各部分ヲ尺寸ニテ求メヨ。

(2) △ABCノ底ニ平行ナル線分DEヲ作ルトキ生ズル比例五ツヲ書キ分ケヨ。

(3) 所設ノ角內ニ在ル一點ニ於テ所設ノ比ニ分タルベキ直線ヲ引ケ。

186. 定理三. 線分(AB)ヲ所設ノ比$(m:n)$*ニ內分又ハ外分スル點ハ各一アリ而シテ唯一ニ限ル。

[證明] I. 內分ノ場合.

線分ABノ一端Aヨリ,之ト一致セザル直線ヲ引キ,此線上ニ於テ$AM=m$, $MN=n$ヲ同方向ニ取

*所設ノ比トアラバ二線分ノ比ニテ表ハサルルモノト思フベシ。以下皆之ニ倣フ。

リ，NB ヲ連ネ，之ニ平行ナル線 MC ヲ引ケバ AB トｰ或點 C ニ於テ交ル。而シテ

$$AC : CB = m : n$$

故ニ AB ヲ所設ノ比ニ內分スル點ハ一アリ。

次ニ他ノ點 C′ ヲ取リ

$$AC' : C'B = m : n$$

トスレバ　$AC' + C'B : C'B = m + n : n$。

$$\therefore \quad AB : C'B = m + n : n.$$

然ルニ同樣ニ　$AB : CB = m + n : n$。

$$\therefore \quad AB : C'B = AB : CB.$$

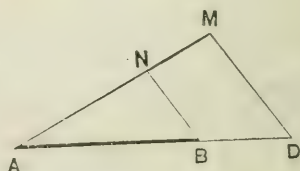
$$\therefore \quad C'B = CB.$$

是レ C′ ガ C ト合スルニ非ザレバ不能ナリ。故ニ AB ヲ所設ノ比ニ內分スル點ハ唯一ニ限ル。

II. 外分ノ場合。

此場合ニ於テハ

$MN = n$ ヲ M 點ヨリ A ニ向ヒテ取リ，NB ヲ連ネ，之ニ平行ナル MD ヲ引キ AB ノ延長ト D ニ於テ交ルトセバ

$$AD : DB = m : n$$

故ニDハABヲ比$m:n$ニ外分ス。

斯ノ如キ點ガ唯一ニ限ルコトハ前ノ如クシテ知リ得ベシ。

注意。 線分ABヲ比$m:n$ニCニ於テ内分シ,Dニ於テ外分スルトキCトDトノ位置ハm, nノ關係ニヨリテ次ノ如ク變ズ。

$m>n$ナルトキCハABノ中點ヨリBノ方ニ偏リDハABノ延長上ニ在リ。

$m<n$ナルトキCハABノ中點ヨリAノ方ニ偏リDハBAノ延長上ニ在リ。

$m=n$ナルトキCハABノ中點ニ來リDノ位置ハ何レノ方ニモ認ムル能ハズ。此コトヲDガ無窮遠或ハ無限遠ニ在リト稱ス。

187. 定義. 二點ガ一線分ヲ同比ニ内分及外分スルトキ此線分ハ此二點ニ於テ**調和ニ**分タレタリト云ヒ,其二點ヲ**調和共軛點**ト云フ。

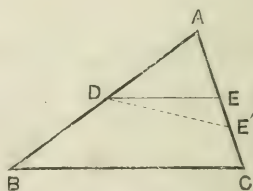
例ヘバ前節ノ圖ニ於テ $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=\frac{m}{n}$ ナルトキハ AB ガ C ト D トニ於テ調和ニ分タレタルニテ,此場合ニハ又 $\frac{CB}{DB}=\frac{CA}{DA}$ ナル故,線分 CD ガ A ト B トニ於テ調和ニ分タレタルナリ。カヽルトキ四點 A, B, C, D ハ**調和列點**ナリト云フ。

今 AB$=a$ トセバ

$$CA=\frac{m}{m+n}a,\quad CB=\frac{n}{m+n}a,$$

$$DA=\frac{m}{m\sim n}a,\quad DB=\frac{n}{m\sim n}a。$$

188.　定理四.　三角形ノ二邊(AB, AC)ヲ相似ニ内分又ハ外分スル直線 (DE) ハ底ニ平行ナリ。

[證明] D ヲ過ギ BC ニ平行ナル直線 DE′ ハ唯一ニシテ AC ヲ比 $\frac{DA}{DB}$ ニ分ツヲ以テ分點 E′ ハ E ニ合ス,是レ AC ヲ同比ニ内分又ハ外分スル點ハ唯一ニ限レバナリ (186)。故ニ DE ハ DE′ ニ合ス。

注意。 上ノ證明法ハ**同一法**ト稱スルモノナリ,之ヲ一般ニ陳述センニ,茲ニ唯一ノ甲ト唯一ノ乙トアルトキ「甲ハ乙ナリ」ト云フ定理ヲ證明セバ直ニ其逆「乙ハ甲ナリ」ト斷定スルヲ得,例ヘバ前節ニ於テ D ヲ過グル BC ノ平行線ハ唯一アリテ其直線ハ AC ヲ比 $\frac{DA}{DB}$ ニ分ツ唯一ノ點ヲ通過ス,故ニ DE∥BC ナリト云フガ如シ。

系. 二直線ガ數多ノ平行線ニテ截ラルヽトキ其二直線ハ相似ニ分タル。

問　題

(1) 1尺ノ線分ヲ5ト3トノ比ニ調和ニ分ツトキハ各部分如何。

(2) 三線分 a, b, c ノ第四比例項及 a, b ノ第三比例項ヲ作レ。

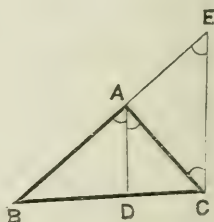
(3) 一直線ヲ $l:m:n$ ノ比ニ分テヨ。

189. 定理五. 三角形ノ內角又ハ外角ノ二等分線ハ對邊ヲ二隣邊ノ比ニ內分又ハ外分ス。

I. 内分ノ場合。

[假設] 三角形 ABC ノ頂角 BAC ノ二等分線ヲ AD トシ底 BC トノ交點ヲ D トス。

[終結] $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$。

[證明] 直線 DA ニ平行ナル線 CE ヲ引キ, BA ノ延長ト E ニ於テ交ラシムレバ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{AE}。$$

然ルニ $\angle ACE = CAD$ 及 $\angle AEC = BAD$。

又　　$\angle CAD = BAD$。

$\therefore$　　$\angle ACE = AEC$。

$\therefore$　　$AE = AC$。

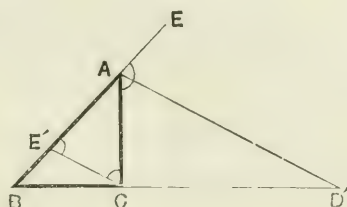
$\therefore$　　$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$。

II. 外分ノ場合。

[假設] 三角形 ABC ノ外頂角 CAE ノ二等分線ヲ AD′ トシ, BC ノ延長トノ交點ヲ D′ トス。

[終結]　$\dfrac{BD'}{CD'}=\dfrac{AB}{AC}$。

[證明]　直線 D′A ニ平行ナル直線 CE′ ヲ引ケバ前ト同様ニ

$\dfrac{BD'}{CD'}=\dfrac{AB}{AE'}=\dfrac{AB}{AC}$。

系.　三角形ノ頂點ヨリ出デ,對邊ヲ二隣邊ノ比ニ内分又ハ外分スル直線ハ頂角又ハ外頂角ノ二等分線ナリ。

問　題

(1)　三角形 ABC ノ底 BC ノ中點ヲ D トシ角 ADB, ADC ノ二等分線ト二邊トノ交點ヲ夫々 E F トスレバ EF ∥ BC ナリ。　(商船・海機)

二邊ノ延長ニ交ラシムルトキハ如何。

(2)　△ABC ノ三邊ヲ夫々 3 尺, 5 尺, 6 尺トシテ最大角ノ二等分線ガ對邊ヲ分ツ部分ノ長サヲ求メヨ(内分及外分)。　(海機)

(3) 底邊ト頂角ト二邊ノ比トヲ知リテ三角形ヲ作レ。 (商船)

(4) △BAC ノ頂角 A ノ二等分線ヲ AD トシ其内心ヲ O トスレバ底ト二邊ノ和トノ比ハ DO ト OA トノ比ニ等シ。 (海機)

(5) A, B, C, D ガ調和列點ナルトキハ

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}。$$

又 AB ノ中點ヲ O トセバ

$$OC : OB = OB : OD$$ (陸士·商船)

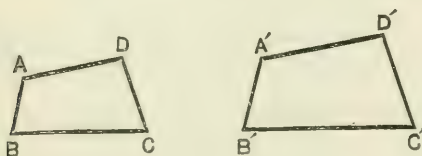
第四章

相似多角形

190. 定義. 多角形ノ角ガ夫々他ノ同邊數ノ多角形ノ角(同順序ニ取リタル)ニ等シキトキハ此兩形ハ互ニ**等角**ナリト云フ。又其相等シキ一組ノ角

ヲ**對應角**ト云ヒ,對應角ヲ夾ム二ツノ邊ヲ**對應邊**ト云フ。

191. **定義.** 同邊數ノ兩多角形ガ互ニ等角ニシテ對應邊ノ比ガ皆相等シキトキハ之ヲ**相似**ナリト云フ。

例ヘバ兩四角形ABCD, A′B′C′D′ニ於テ

$$A=A',\quad B=B',\quad C=C',\quad D=D'$$

及
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

ナルトキハ此兩形ヲ相似ナリト云ヒ,次ノ如ク記ス。　$ABCD \backsim A'B'C'D'$.

對應邊ノ比ヲ兩多角形ノ**相似比**ト云フ。

相似多角形ノ對應邊ガ共ニ左廻リノ順序若クハ共ニ右廻リノ順序ニ在ルトキ此等ノ相似多角形ハ**相似ニ置カレタリ**又ハ兩多角形ハ**直接ニ**相

似ナリト云ヒ,之ニ反シテ一ハ左廻リ他ハ右廻リノ順序ニ於テ對應邊ヲ有スルトキハ**反對ニ相似**ナリト云フコトアリ。

本書ニ於テハ反對ニ相似ナル多角形ヲ取扱ハズ。故ニ爾後單ニ相似多角形ト云ハバ直接ニ相似ナル多角形ヲ指スモノト知ルベシ。

相似多角形ノ周圍ノ比ハ其相似比ニ等シキコト明ナリ(182[4])。

例ヘバ
$$\frac{AB+BC+CD+DA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

互ニ合同ナル三角形ハ互ニ相似ナルコト明ナリ。又同一ノ三角形ニ相似ナル二ツノ三角形ハ互ニ相似ナルコト明ナリ。

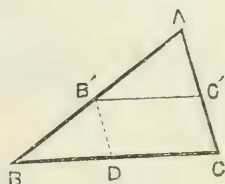
192. 定理六. 三角形(ABC)ノ底ニ平行ナル直線(B′C′)ト二邊トハ原形ト相似ナル三角形(AB′C′)ヲ爲ス。

[證明]　先$B'C' \parallel BC$ナル故,兩三角形ABC, AB′C′ハ互ニ等角ナリ。

次ニ
$$\frac{AB'}{B'B}=\frac{AC'}{C'C}.$$

$$\therefore \quad \frac{AB'}{AC'}=\frac{B'B}{C'C}=\frac{AB'+B'B}{AC'+C'C}.$$

$$\therefore \quad \frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}.$$

同様ニ AC ニ平行ナル直線 B′D ヲ引クトキハ B′C′=DC ナル故

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{CD}{CB}=\frac{B'C'}{BC}.$$

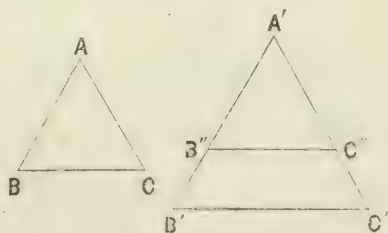
之ヲ前式ト組合スルトキ

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A}{CA}.$$

故ニ兩三角形ノ對應邊ハ比例ヲナス。

$$\therefore \quad \triangle AB'C' \backsim ABC.$$

193. 定理七. 互ニ等角ナル兩三角形(ABC, A′B′C′)ハ相似ナリ。

[證明] 邊 A′B′(若クハ其延長)中ニ點 B″ ヲ取リ A′B″ ヲ對應邊 AB ニ等シクシ, B′C′ ニ平行ナル

直線 B″C″ ヲ引クトキハ。

$$\triangle A'B''C'' \backsim A'B'C'.$$

然ルニ $\triangle ABC, A'B''C''$ ハ二角及其頂點間ノ邊ヲ等シクス。

$$\therefore \qquad \triangle ABC \equiv A'B''C''.$$

$$\therefore \qquad \triangle ABC \backsim A'B'C'.$$

系一. 一鋭角ヲ等シクスル二ツノ直角三角形ハ相似ナリ。

系二. 相似三角形ノ高サノ比ハ其相似比ニ等シ。

系三. 兩三角形ノ邊ガ夫々平行ナルカ,又ハ夫々垂直ナレバ此兩三角形ハ相似ナリ。

問　　題

(1) 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ下セル垂線ハ之ニテ分テル斜邊ノ二部分ノ比例中項ナリ。

(2) 所設ノ二線分ノ比例中項ヲ作レ。

(3) 圓外ノ點 A ヨリ割線 ABC, ADE ヲ引キ圓周ト B, C, D, E ニテ交ラシムルトキ △ABD, AEC ハ相似ナリ。 (陸士)

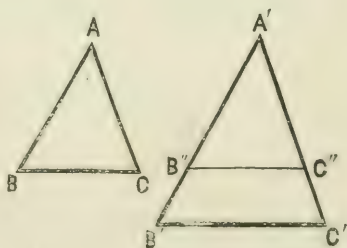
(4) 一點ヨリ出ヅル直線ハ平行線ヲ相似ニ分ツ。逆モ亦正シキカ。

194. 定理八. 兩三角形ノ一角ガ相等シク且其角ノ二邊ガ比例ヲ爲ストキ此兩三角形ハ相似ナリ。

[假設] △ABC, A′B′C′ ニ於テ

$$A=A', \qquad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}。$$

[終結] △ABC ∽ A′B′C′。

[證明] 邊 A′B′(若クハ其延長)中ニ點 B″ ヲ取リ A′B″ ヲ AB ニ等シクシ B′C′ ニ平行ナル直線 B″C″ ヲ引ク。

然ラバ

$$\triangle A'B''C'' \backsim A'B'C' \qquad (192)$$

$$\therefore \qquad \frac{A'B''}{A'B'}=\frac{A'C''}{A'C'}。$$

然ルニ
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}。 \qquad \text{(假設)}$$

及
$$A'B''=AB。 \qquad \text{(作圖)}$$

$$\therefore \qquad A'C''=AC。$$

故ニ$\triangle ABC, A'B''C''$ハ二邊及其夾角ヲ等シクス

$$\therefore \qquad \triangle ABC \equiv A'B''C''。$$

$$\therefore \qquad \triangle ABC \backsim A'B'C'。$$

195.　定理九.　三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ト比例ヲ爲ストキ此兩三角形ハ相似ナリ。

[假設]　$\triangle ABC, A'B'C'$ニ於テ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}。$$

[終結]　$\triangle ABC \backsim A'B'C'$

[證明]　邊$A'B'$(若クハ其延長)中ニ點B''ヲ取リ(前節ノ圖ヲ見ヨ)$A'B''$ヲABニ等シクシ$B'C'$ニ平行ナル直線$B''C''$ヲ引ク。

然ラバ　　$\triangle A'B''C'' \backsim A'B'C'$。　　(192)

∴　　$\frac{A'B''}{A'B'}=\frac{B''C''}{B'C'}=\frac{C''A'}{C'A'}$。

然ルニ　　$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$。　　(假設)

及　　$A'B''=AB$。　　(作圖)

∴　　$B''C''=BC,\quad C''A'=CA$。

故ニ $\triangle ABC, A'B''C''$ ハ三邊ヲ等シクス。

∴　　$\triangle ABC \equiv A'B''C''$。

∴　　$\triangle ABC \backsim A'B'C'$。

問　　題

(1)　$\triangle ABC$ ノ頂點 A ヨリ BC ニ下セル垂線 AD ガ形內ニ在リテ BD, DC ノ比例中項ナルトキ BAC ハ直角ナリ。　　(大豫)

(2)　定點ヨリ定圓周ヘ引ケル直線ヲ所設ノ比ニ分ツトキ分點ノ軌跡ハ如何。　　(名工)

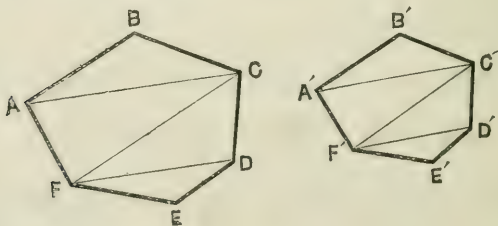
(3)　$\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC 上ニ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$ ナル點 D, E ヲ設クルトキハ BE, CD ハ互ニ 1: 2 ニ分タル。　　(東師)

(4) 一角ヲ等シクシ且他ノ角ノ二邊ガ等角ノ對邊ノ相對應スル樣ニ比例ヲナセル兩三角形ニ於テ,第三角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ヲナス。若相等シキトキハ兩三角形ハ相似ナリ。

注意。此問題ハ第58頁問題4ト密接ノ關係ヲ有ス。

196. 定理十. 互ニ相似ニシテ且相似ニ置カレタル同數ノ三角形ヨリ成ル兩多角形ハ相似ナリ。

[假設] △ABC,ACF,FCD等ハ夫々A′B′C′,A′C′F′,F′C′D′等ト相似ニシテ且相似ニ置カレタリトス

[終結] 多角形 ABCDEF ∽ A′B′C′D′E′F′。

[證明] 先兩多角形ノ各角ハ相似三角形ノ對應

角ナルカ,又ハ二ツ以上ノ相似三角形ノ對應角ノ和ニ等シ。故ニ兩多角形ハ等角ナリ。

次ニ三角形ノ相似ニ由テ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}\left(=\frac{CA}{C'A'}\right)=\frac{AF}{A'F'}\left(=\frac{FC}{F'C'}\right)=\frac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots$$

故ニ兩多角形ノ對應邊ハ比例ヲ爲ス。

故ニ兩多角形ハ相似ナリ。

系。 相似ナル兩多角形ハ相似ニシテ且相似ニ置カレタル同數ノ三角形ヨリ成ル。

197. 定理十一. 一點ヨリ多角形ノ總テノ頂點ヘ引ケル各直線若クハ其延長中ニ頂點ヲ有シ,且其各邊ニ平行ナル邊ヲ有スル多角形アリ。而シテ此多角形ハ原形ト相似ナリ。

問題

(1) 一點ヨリ多角形ノ總テノ頂點ヘ引ケル直線ヲ所設ノ比ニ分チ分點ヲ連結スルトキ生ズル多角形ハ原形ト相似ナリ。

(2) 同邊數ノ正多角形ハ相似ナリ。

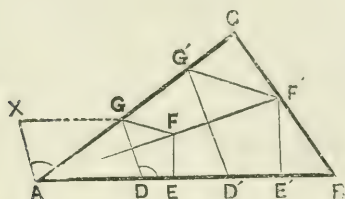
(3) 相似多角形ハ其對應邊ガ平行ナル樣ニ置クコトヲ得,而シテ對應頂點ヲ連ヌル諸線ハ同一ノ點ヲ通過スルカ又ハ平行ナリ。 (*Desargues*)

注意。此交點ヲ兩形ノ**相似ノ中心**ト云フ。

198. 作圖題一. 所設ノ線分上ニ所設ノ多角形ト相似ナル多角形ヲ作レ。

199. 作圖題二. 所設ノ三角形ニ,所設ノ四角形ニ相似ナル四角形ヲ內接セヨ。

[作圖] 所設ノ三角形ヲ ABC トス。頂點 A ヲ過ギ AB ト所設ノ四角形ノ一角ニ等シキ角ヲナス直線 AX ヲ引キ,邊 AC 中ノ任意ノ點 G ヲ過ギ直線 AX ト平行ナル直線 GD ヲ引キ邊 AB ト D ニ於テ交ラシム。線分 DG 上ニ所設ノ四角形ト相似ナル四角形 DEFG ヲ作ル (198)。直線 AF ヲ引キ邊 BC ト F′ ニ於テ交ラシム。而シテ $F'G' \parallel FG$, $F'E' \parallel FE$, $G'D' \parallel GD$ ナラシム

然ラバ D′E′F′G′ ハ所要ノ四角形ナリ。

[證明] 三角形 ABC ノ各邊ハ四角形 D′E′F′G′ ノ各頂點ヲ通過ス。故ニ後者ハ前者ニ內接ス(第121頁問題3註)。次ニ四角形 D′E′F′G′ ハ點 A ト他ノ四角形 DEFG ノ頂點トヲ連ヌル直線ノ延長中ニ頂點ヲ有シ且其各邊ニ平行ナル邊ヲ有ス。

$\therefore$ 四角形 D′E′F′G′ $\backsim$ DEFG。　(197)

故ニ四角形 D′E′F′G′ ハ所設ノ四角形ト相似ナリ。

注意。本節ノ作圖題ノ吟味ハ所設ノ三角形ト四角形トガ任意ナルトキ種々ノ場合起リテ困難ナルガ故ニ之ヲ略ス。上記ノ如キ作圖法ヲ相似法ト云フ。

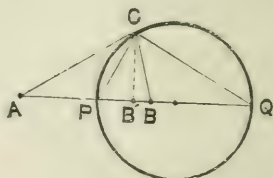
問　題

(1) 所設ノ三角形ニ正方形ヲ內接セヨ。(東工)

(2) 所設ノ半圓ニ正方形ヲ内接セヨ。(東師)

(3) 所設ノ扇形ニ正方形ヲ内接セヨ。

200. 定理十二. 二點(A,B)ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ハ之ヲ連ヌル線分(AB)ヲ此比ニ調和ニ分チタル二點(P, Q)間ノ線分(PQ)ヲ直徑トセル圓周ナリ。 (*Apollonius*)

[證明] I. C ヲ所設ノ條件ニ適合スル點トシ, $m:n$ ヲ所設ノ比トセバ

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{BQ}=\frac{m}{n}.$$

故ニ CP, CQ ハ ∠ACB 及之ニ隣レル補角ヲ二等分ス。故ニ ∠PCQ ハ直角ニシテ C 點ハ PQ ヲ直徑トセル圓周上ニアリ。

II. 次ニ C ヲ此圓周上ノ任意ノ點トシ直線 CB′ ヲ引キ ∠PCB′=ACP ナラシムレバ, CQ ハ ∠ACB′ ニ隣レル補角ノ二等分線ナリ。故ニ

$$\frac{AC}{B'C}=\frac{AP}{B'P}=\frac{AQ}{B'Q}。\quad\therefore\quad\frac{AP}{AQ}=\frac{B'P}{B'Q}。$$

然ルニ $\frac{AP}{AQ}=\frac{BP}{BQ}$。　$\therefore\ \frac{B'P}{B'Q}=\frac{BP}{BQ}$。

故ニB′ハBニ合シCB′ハCBニ合ス。故ニ

$$\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}。$$

故ニ $\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}$ ナル如キC點ノ軌跡ハPQヲ直徑トセル圓周ナリ。

問　　題

(1) 三定點ヨリノ距離ノ比ガ $l:m:n$ ナル點ヲ求メヨ。

(2) 二定直線ヨリノ距離ノ比ガ $m:n$ ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(3) 三角形ノ三邊ヨリノ距離ノ比ガ $l:m:n$ ナル點ヲ形內ニ求メヨ。

(4) 三角形ノ底邊ノ位置,大サ及他ノ二邊ノ比ガ一定ナルトキ,頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

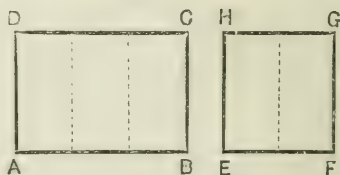
(5) 三角形ノ底邊他ノ二邊ノ比及高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

第五章

面積ノ比

201. 定理十三. 等高ノ矩形ノ比ハ底邊ノ比ニ等シ。

[證明] (兩底ガ通約スベキモノナリトス)

底 AB, EF ノ公約量ヲ求メ AB ハ其三倍, EF ハ其二倍ナリトスレバ, AB ヲ三等分シ EF ヲ二等分セヨ。此等ノ分點ヨリ底ニ垂線ヲ引クトキ所設ノ矩形 ABCD, EFGH ハ夫々三等分及二等分セラレ其各部分ハ皆合同ナリ.

$$\therefore \qquad \frac{\square AC}{\square EG}=\frac{3}{2}.$$

然ルニ

$$\frac{AB}{EF}=\frac{3}{2}.$$

$$\therefore \qquad \frac{\square AC}{\square EG}=\frac{AB}{EF}.$$

系一. 等底ノ矩形ノ比ハ其高サノ比ニ等シ。

系二. 等高(又ハ等底)ノ三角形ノ比ハ其底邊(又ハ高サ)ノ比ニ等シ。

202. 定理十四. 四線分 (a, b, c, d) ガ比例ヲ爲サバ外項ノ矩形 (ad) ハ内項ノ矩形 (bc) ニ等シ。

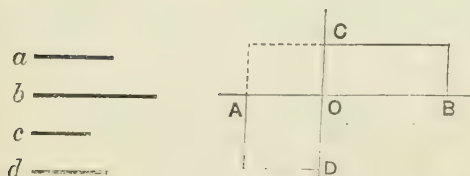
[證明] O ニ於テ直交スル二直線 AB, CD 上ニ

$$\mathrm{OA}=a,\quad \mathrm{OB}=b,\quad \mathrm{OC}=c,\quad \mathrm{OD}=d$$

ヲ取リ矩形 EC, CA, AD ヲ作ルトキハ

$$\frac{\square\mathrm{AC}}{\square\mathrm{CB}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OB}}=\frac{a}{b},$$

及

$$\frac{\square\mathrm{AC}}{\square\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OD}}=\frac{c}{d}.$$

然ルニ　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,　$\therefore\ \frac{\square\mathrm{AC}}{\square\mathrm{CB}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}.$

$$\therefore\ \square\mathrm{AD}=\mathrm{BC}.$$

系一. <u>二ツノ矩形又ハ三角形ガ等積ナルトキ其高サノ比ハ底ノ反比ニ等シ。</u>

系二. <u>二線分ノ矩形ハ其比例中項ノ上ノ正方形ニ等シ。此逆モ亦眞ナリ。</u>

203. 定理十五. 直角三角形ノ二邊上ノ正方形ノ比ハ其斜邊上ニ投ズル射影ノ比ニ等シ。

[證明] 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ヘ垂線 AD ヲ引クトキハ

$$\triangle ABC \backsim DBA \backsim DAC。$$

$\therefore$ AB : BC = DB : BA。 $\therefore$ $\overline{AB}^2 = BD.BC$。(202)

又 AC : BC = DC : AC。 $\therefore$ $\overline{AC}^2 = CD.BC$。(202)

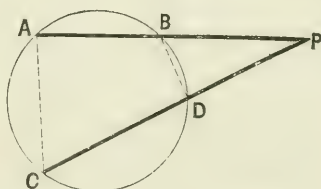
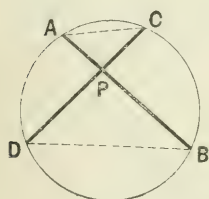
$\therefore$ $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD.BC : CD.BC = BD : CD$。(201)

問 題

(1) △ABC ノ頂點 A ヨリ任意ノ一點 O ヘ直線 AO ヲ引キ BC ト交ル點ヲ D トスレバ

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC} = \frac{BD}{CD}。$$

(2) 三角形 ABC ノ重心ヲ G トス,三ツノ三角形 BGC, CGA, AGB ノ面積ヲ比較セヨ。（商船）

204. 定理十六. 圓ノ二弦若クハ其延長ガ相交ルトキ各弦ノ二部分ノ矩形ハ相等シ。

[證明] AB, CD ヲ二弦トシ P ヲ其交點若クハ其延長ノ交點トス。△APC, BPD ハ互ニ等角ナル故相似ナリ(128 系四, 130 系一)。

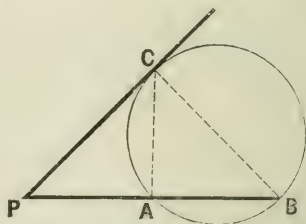
$$\therefore \qquad AP : DP = CP : BP.$$

$$\therefore \qquad AP.PB = CP.PD.$$

系一. 圓内ノ一定點ヲ過グル弦ノ二部分ノ矩形ハ常ニ此點ヲ過グル最小弦ノ半ノ上ノ正方形ニ等シ。

系二. 二線分若クハ其延長ガ相交リ各線分ノ二部分ノ矩形ガ相等シキトキハ二線分ノ端ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

205. 定理十七. 圓外ノ一點ヨリ引ケル割線ノ二部分ノ矩形ハ此點ヨリ引ケル切線ノ上ノ正方形ニ等シ。

[證明]　PAB ヲ割線トシ PC ヲ切線トスレバ $\triangle$PCA, PBC ハ互ニ等角ナル故ニ相似ナリ (132)。

$$\therefore \quad PA : PC = PC : PB.$$

$$\therefore \quad PA.PB = \overline{PC}^2.$$

系. 一線分(AB)ノ延長中ノ點(P)ヨリ,其上ノ正方形ガ此線分ノ二部分ノ矩形(PA.PB)ニ等シキ他ノ線分(PC)ヲ引クトキハ此線分ハ其一端(C)ト前ノ線分(AB)ノ二端トヲ通過スル圓ノ切線ノ部分ナリ。

[證明] A ヲ通過シ, C ニ於テ PC 線ニ切スル圓周ト PA 線トノ交點ヲ B′ トセヨ。然ラバ

$$PA.PB' = \overline{PC}^2. \qquad (本定理)$$

然ルニ
$$PA.PB = \overline{PC}^2.$$

$$\therefore \qquad PB' = PB.$$

故ニ B′ ハ B ニ合ス。

注意。 此系ハ前節ノ定理ヲ用フルモ亦證明スルコトヲ得。

問題

(1) 二定點 A, B ヲ過グル數多ノ圓周ヘ AB ノ延長中ノ一點ヨリ引ケル切線ハ皆相等シ。

(2) 相交ル二圓周ヘ等長ノ切線ヲ引キ得ベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(3) 圓周上ノ一點ヨリ弦ニ至ル垂線ノ平方ハ其點ニ於ケル切線ヘ其弦ノ兩端ヨリ引ケル垂線ノ矩形ニ等シ。 (長商)

(4) 圓外ノ一點 P ヨリ切線 PA, PB ヲ引キ弦 AB ノ中點 C ヲ過ギテ任意ノ弦 DE ヲ引クトキハ PC ハ角 DPE ヲ二等分ス。 (大豫)

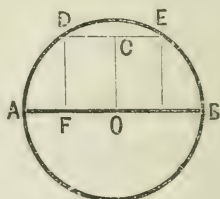
206. 作圖題三。 二線分ノ和(p)及其矩形ノ面積(q^2)ヲ知リテ此二線分ヲ作レ。

[二線分ノ積*ハ其比例中項ノ上ノ正方形ニ等シキ故(202系二),所設ノ積ヲ q^2 ニテ表セバ q ハ既知ノ長サナリ**。而シテ所要ノ二線分 x, y ハ二ツノ條件

$$x+y=p,$$

$$xy=q^2$$

ニ適合セザル可カラズ]。

[作圖] AB$=p$ ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ,之ニ垂直ナル半徑上ニOC$=q$ ヲ取リ,C ヲ過ギ AB ニ平行ナル弦 DE ヲ引キ,D ヨリ AB ヘ垂線 DF ヲ引クトキ AF, FB ハ所要ノ二線分ナリ。

* 二線分ノ矩形ノ面積ト云フ代リニ二線分ノ積ト云フコトアリ。

** 所設ノ面積ハ正方形ノ面積ニテ表サレ従テ其正方形ノ一邊ハ知ラレタルモノト思フベシ。以下之ニ倣フ。

[證明]　$AF+FB=AB=p$,　$AF.FB=\overline{DF}^2=q^2$.

[吟味]　本題ハ唯D點ガ存在スルトキ卽

$$OC \leqq OA \quad 卽 \quad q \leqq \frac{p}{2}$$

ナルトキノミ解答アリ。其數ハ2若クハ1ナリ.

注意。今圖ニヨリx, yノ長サヲ計算センニ

$x=AF=OA-OF$,　$y=FB=OA+OF$。

$$\overline{OF}^2=\overline{OD}^2-\overline{DF}^2=\overline{OA}^2-\overline{OC}^2。$$

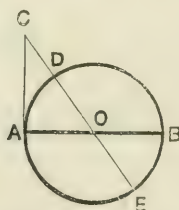
$$\therefore \qquad OF=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}。$$

$$\therefore \qquad x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}。$$

$$y=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}。$$

是レ二次方程式 $z^2-pz+q^2=0$ ノ二根ナリ

207. 作圖題四.　二線分ノ差(p)及矩形ノ面積(q^2)ヲ知リテ此二線分ヲ作レ。

[作圖]　$AB=p$　ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ，Aニ

於ケル切線上ニ $AC=q$ ヲ取リ, C ヨリ中心線 CDOE ヲ引ケバ CD, CE ハ所要ノ二線分ナリ。

[證明] $CE-CD=DE=p$, $CD.CE=\overline{CA}^2=q^2$。

[吟味] 本題ハ常ニ成立ス。

注意. $x=CE=CO+OA$。

$y=CD=CO-OA$。

而シテ直角三角形 OAC ニ於テ

$$\overline{CO}^2=\overline{OA}^2+\overline{AC}^2.$$

$$\therefore \quad CO=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q^2}.$$

$$\therefore \quad x=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q^2}+\frac{p}{2}.$$

$$y=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q^2}-\frac{p}{2}.$$

是レ二次方程式 $z^2-pz-q^2=0$ ノ二根ノ絶對値ナリ。

問 題

(1) 二定點ヲ過ギ定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

(海機·農實)

(2) 二定點ヲ過ギ定圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。(東商)

(二定點ト定圓周上ノ任意ノ點トヲ過グル圓ヲ畫キ,共通弦ノ延長ト二定點ヲ連結スル線トノ交點ヨリ定圓ニ切線ヲ引ケ)。

(3) 作圖題三若クハ四ヲ應用シテ任意ノ整數ノ平方根ヲ表ス直線ヲ求メヨ。

(4) 所設ノ線分ヲ二ツニ分チ其二部分ノ上ノ正方形ノ和ヲシテ所設ノ面積ヲ有セシメントス,其方法如何。

208. 定義. 數多ノ比ノ乘積ニ等シキ比ヲ其**複比**或ハ**相乘比**ト云フ。

例ヘバ $\frac{X}{Y}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}$ ナルトキハ $\frac{X}{Y}$ ヲ $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$ ノ複比ト云フ。

相等シキ二比ノ複比ヲ其**二乘比**ト云ヒ,相等シキ三比ノ複比ヲ其**三乘比**ト云フ。

例ヘバ $\frac{X}{Y}=\left(\frac{A}{B}\right)^2$ ナルトキハ $\frac{X}{Y}$ ハ $\frac{A}{B}$ ノ二乘比ニシテ, $\frac{X'}{Y'}=\left(\frac{A}{B}\right)^3$ ナルトキハ $\frac{X'}{Y'}$ ハ $\frac{A}{B}$ ノ三乘比ナリ。

209. 定理. A, B, C ヲ同種類ノ量トスレバ A:C ハ A:B 及 B:C ノ複比ニ等シ。

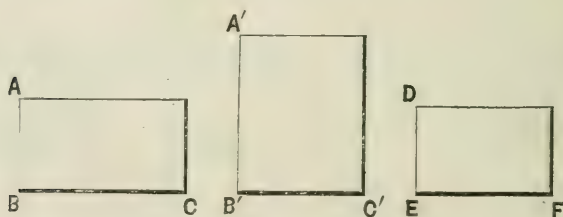
[證明] $$\frac{A}{B}=p,\quad \frac{B}{C}=q$$

トスレバ $$A=pB,\quad B=qC.$$

$$\therefore\quad A=pqC.$$

$$\therefore\quad \frac{A}{C}=pq=\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}.$$

210. 定理十八. 矩形ノ比ハ高サノ比ト底ノ比トノ複比ニ等シ。

[證明] 矩形 AC ト等高ニシテ,矩形 A′C′ ト等底ナル第三矩形 DF ヲ作リタリトス.

然ラバ $$\frac{\square AC}{\square DF}=\frac{BC}{EF},\qquad (201)$$

及 $$\frac{\square DF}{\square A'C'}=\frac{DE}{A'B'}.\qquad (201系一)$$

然ルニ $\frac{\square AC}{\square A'C'}=\frac{AC}{DF}\times\frac{DF}{A'C'}$。 (209)

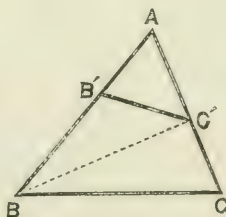
$$\therefore\ \frac{\square AC}{\square A'C'}=\frac{BC}{EF}\times\frac{DE}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}\times\frac{AB}{A'B'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{BC}{B'C'}.$$

系. 正方形ノ比ハ邊ノ比ノ二乘比ニ等シ。

注意。 $\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{BC}{B'C'}$ 及 $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$。

211. 定理十九. 一角ヲ等シクスル兩三角形(又ハ平行四邊形)ノ比ハ其等角ヲ夾メル二邊ノ矩形ノ比ニ等シ。

[證明] 1. 兩三角形ノ等角ヲ重ネ ABC, AB′C′ トシ BC′ ヲ引ケバ

△AB′C′, ABC′ ハ同高ナルヲ以テ

$$\frac{\triangle AB'C'}{\triangle ABC'}=\frac{AB'}{AB}。\qquad (201\text{ 系二})$$

同樣ニ

$$\frac{\triangle ABC'}{\triangle ABC}=\frac{AC'}{AC}。\qquad (\text{同上})$$

然ルニ
$$\frac{\triangle AB'C'}{\triangle ABC}=\frac{AB'C'}{ABC'}\times\frac{ABC'}{ABC},\qquad(209)$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle AB'C'}{\triangle ABC}=\frac{AB'}{AB}\times\frac{AC'}{AC}=\frac{AB'.AC'}{AB.AC}。\qquad(210)$$

II.　平行四邊形ハ同底同高ノ三角形ノ二倍ニ等シ。

系.　三角形ノ一角ガ他ノ三角形ノ一角ト補角ヲナストキ其面積ノ比ハ此等ノ角ヲ夾メル二邊ノ矩形ノ比ニ等シ。

212.　定理二十.　相似三角形ノ面積ノ比ハ相似比ノ二乘比ニ等シ。

[證明]　△ABC, A'B'C' ヲ相似ナリトセバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'}。\qquad(211)$$

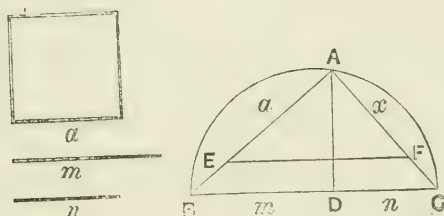
然ルニ
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}。\qquad(191)$$

故ニ
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2。$$

系一.　相似多角形ノ面積ノ比ハ相似比ノ二

乘比ニ等シ。(196系)

系二. ニツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シ。(系一及210系)

213. 作圖題五. 所設ノ正方形(a^2)トノ比ガ所設ノ比$(m:n)$ニ等シキ正方形ヲ作レ。

[作圖] 一直線上ニ BD$=m$, DC$=n$ ヲ取リ BC ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ D ヨリ BC ニ垂線 DA ヲ引キ圓周トノ交點ヲ A トシ AB, AC ヲ連ネ AB 若クハ其延長中ニ E 點ヲ取リ AE$=a$ ナラシム。而シテ EF ヲ BC ニ平行ニ引キ AC ト F ニ於テ會セシムレバ AF ガ所要ノ正方形ノ一邊ナリ。

[證明] AF ヲ x ニテ表セバ EF∥BC ナル故

$$\frac{a}{x}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}。$$

然ルニ　　$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2}{\overline{\mathrm{AC}}^2}=\frac{m}{n}。\qquad(203)$$

∴　　$$\frac{a^2}{x^2}=\frac{m}{n}.$$

問　　　　題

(1) △ABC ノ二中線 AD, BE ノ交點ヲ G トスレバ三角形 AGB, DGE ノ比如何。

(2) 所設ノ三角形ト頂角ヲ共有シ且之ト等積ナル等脚三角形ヲ作レ。　　(名工・陸主)

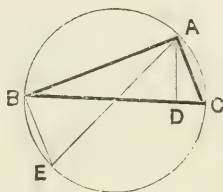
(3) 所設ノ多角形ト相似ニシテ且所設ノ面積ヲ有スル多角形ヲ作レ。

(4) 直角三角形ノ斜邊上ニ畫ケル多角形ハ他ノ二邊上ニ作レル之ト相似ニシテ且相似ニ置カレタル多角形ノ和ト等積ナリ。

(5) 一邊ニ垂直ナル線ヲ引キテ所設ノ三角形ヲ二等分セヨ。　　(農實)

214. 定理二十一. 三角形ノ二邊

(AB, AC) ノ矩形ハ第三邊ニ應ズル高サ(AD) ト外接圓ノ直徑トノ矩形ニ等シ。

[證明] AE ヲ外接圓ノ直徑トシ BE ヲ連ヌルトキハ △ABE, ADC ハ互ニ等角ナル故相似ナリ。

∴　AB : AD = AE : AC。

∴　AB.AC = AD.AE。

系.　三角形ノ頂角ノ二等分線上ノ正方形ハ二邊ノ矩形ト底ノ二部分ノ矩形トノ差ニ等シ。

215. 定理二十二.　圓ニ內接スル四邊形ノ對邊ノ矩形ノ和ハ對角線ノ矩形ニ等シ。　*(Ptolemy)*

[假設] ABCD ヲ圓ニ內接スル四邊形トス。

[終結] AB. CD + AD. BC = AC. BD。

[證明] 直線 AE ヲ引キ ∠BAE = CAD ナラシメ, BD ト E ニ於テ會セシムルトキハ ∠ABE = ACD ナル故 △ABE ∽ ACD ナリ。

∴ $AB : AC = BE : CD$。

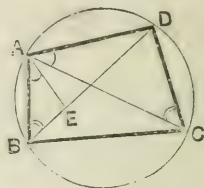
∴ $AB.CD = AC.BE$。

又 $\angle BAC = EAD$ ナル故

$\triangle ABC \backsim AED$。

∴ $BC : ED = AC : AD$。

∴ $AD.BC = AC.ED$。

故ニ $AB.CD + AD.BC = AC(BE + ED) = AC.BD$。

系. 圓ニ內接セザル四邊形ノ對角線ノ矩形ハ對邊ノ夾メル矩形ノ和ヨリ小ナリ。

問 題

(1) $\triangle ABC$ ノ底 BC 或ハ其延長上ニ一點 D ヲ取ルトキハ $\triangle ABD$, ACD ノ外接圓ノ直徑ノ比ハ AB, AC ノ比ニ等シ。

(2) 三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ R トシ三邊ヲ a, b, c トセバ面積ハ $\dfrac{abc}{4R}$ ナルコトヲ證セヨ。

（陸士）

(3) 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スルトキハ對邊ノ矩形ノ和ハ四邊形ノ面積ノ二倍ナリ。

(4) 三角形ノ三邊ノ長サガ4尺,5尺,6尺ナルトキ其長サガ中間ニ位スル中線ノ長サヲ計算セヨ。

第四篇　雜題

(1) 外切スル兩圓ニ共通ナル切線ABハ兩圓ノ直徑AC, BDノ比例中項ナリ。　(陸士·長商)

(2) 二圓周ノ交點ヲ過ギ一ツノ直線ヲ引キ各圓ガ其ヨリ截リ取ル弦ヲシテ1ト2トノ比ヲ爲サシメヨ。　(仙工)

(3) 三角形ABCノ邊ABヲACヨリ小ナリトシ, ABヲDマデ延長シ, AC上ニ一點Eヲ設ケテBD及CEヲABニ等シカラシメ, DEヲ結ビテBCトFニ於テ交ラシムレバAB:AC::EF:FDナリ。　(商船)

(4) 三角形ABCノ底邊BC上ノ一點Pヨリ夫々二邊AB, ACニ平行ナルPY, PXヲ引キテ夫々AB, ACトX, Yニ於テ交ラシムレバ△AXYハ△BPXト△CPYトノ比例中項ナリ。　(海機)

(5)　平行四邊形 ABCD ノ頂點 A, B, C, D ヨリ對角線ヘ下セル垂線ノ足ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ四邊形 EFGH ト ABCD トハ相似ナリ。

（東師）

(6)　一直線DEFガ三角形ABCノ三邊BC, CA AB ト夫々 D, E, F ニ於テ交リ AB, AC ト等角ヲナストキハ　BD : CD=BF : CE。　（海兵）

(7)　直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ對邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ叉角 B ノ二等分線ヲ對邊 AC ト E ニ於テ交ラシメ AD ト BE トノ交點ヲ O トセバ　DO : OA :: AE : EC。　（海機）

(8)　四邊形ノ一雙ノ對角ノ二等分線ガ對角線ノ一ツノ上ニテ交ルトキハ他ノ一雙ノ對角ノ二等分線モ亦他ノ對角線上ニ於テ交ル。　（同上）

(9)　二直線ニテ包ム矩形ハ其各線上ノ正方形ノ比例中項ナリ。　（同上）

(10)　定圓周上ノ一點 A ヨリ切線 APQ ヲ引キ其圓ノ中心Cヲ過グル一定圓ト P, Q ニ於テ交ラシムレバ矩形PC. QCハ一定ナリ。　（陸士）

(11)　底邊 a 米,高サ h 米ナル三角形ニ於テ底邊

ニ平行ナル一直線ヲ作リ此三角形ヲ二等分スルトキハ此直線ノ長サハ幾許ナルカ。　(同上)

(12)　三角形 ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ二邊 AB, AC ヲ夫々 D, E ニテ截レバ直線 BE, CD ノ交點 F ト頂點 A トヲ結ビ付クル直線ノ延長ハ底邊 BC ヲ二等分ス。　(東工)

(13)　圓ニ內接スル三角形 ABC ノ A ニ於ケル切線ガ BC ノ延長ト D ニ於テ交ルトキハ

$$BD : CD :: \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2。$$　(東商·海兵)

(14)　三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ上ニ夫々 D, E, F ヲ取リ BD : CD, CE : EA, AF : FB ヲ皆 2 : 3 ニ等シカラシムルトキハ三角形 AEF, DEF ガ三角形 ABC ニ對スル比各如何。　(商船)

(15)　對角線ニ平行セル二ツノ直線ヲ引キ平行四邊形ノ面積ヲ三等分セヨ。　(商船)

(16)　中心 C ナル圓ノ外ノ一點 P ヨリ圓ニ二ツノ切線 PA, PB ヲ引キ弦 AB ノ中點ヲ過ギテ任意ノ弦 MN ヲ作ルトキハ四ツノ點 P, C, M, N ハ同ジ圓周上ニアリ。又點 P ト中心 C トヲ連スル直線ハ角 MPN ヲ二等分ス。　(大豫)

第五篇

正多角形及圓

第一章

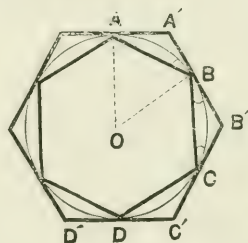
內接及外接正多角形

216. 定理一. 圓周ヲ若干等分シタルトキ分點ヲ順次ニ連ヌレバ正多角形ヲ生ズ。又分點ニ於ケル切線ハ正多角形ヲ成ス。

[假設] 圓周ヲ n 等分シ分點ヲ A, B, C 等トシ此等ノ分點ニ於ケル切線ノ交點ヲ A′,B′,C′ 等トス。

[終結] 多角形 ABC……及多角形 A′B′C′……ハ正多角形ナリ。

[證明] I. 邊 AB, BC 等ハ等弧ノ弦ナル故皆相等シク,又其各角ハ圓周ノ $\frac{n-2}{n}$ ニ當ル弧ノ上ニ立ツ內接角ナル故相等シ。故ニ多角形 ABC……ハ等角等邊ナリ,故ニ正多角形ナリ。

II. 邊 AB, BC 等ハ相等シク,底角 A′AB, B′BC 等ハ皆等弧 AB, BC 等ノ上ニ立ツ內接角ニ等シキ故相等シ (132)。

∴ △A′AB≡B′BC≡…………。

故ニ多角形 A′B′C′………ハ等角等邊ナリ,故ニ正多角形ナリ。

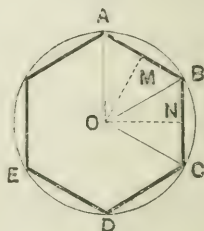
217. 定理二. 正多角形ハ圓ニ內接スベク又外接スベシ。

[證明] I. 正多角形ABC………ノ二角 A, B ノ二等分線ノ交點ヲ O トシ, OA, OB, OC 等ヲ連ヌルトキハ △AOB, BOC ハ二邊ト夾角トヲ等シクスル故合同ナリ,故ニ OA=OC。而シテ △AOB ハ等脚

ナリ。

$\therefore$ OA=OB=OC。　$\therefore$ ∠OCB=OBC。

故ニ OC ハ角 C ノ二等分線ナリ。故ニ順ヲ追ヒテ同樣ニ OD, OE 等モ皆 OA ニ等シ。故ニ A B, C 等ハ O ヲ中心トスル圓周上ニアリ。

II. OM, ON 等ヲ O ヨリ邊 AB, BC 等ニ至ル垂線トスレバ此等ノ垂線ハ中心ト等弦トノ距離ナル故皆相等シ。

故ニ O ヲ中心トシ, OM ヲ半徑トシテ畫ケル圓ハ正多角形 ABC……ニ内接ス。

218. 定義. 正多角形ノ内接圓及外接圓ノ共通中心ヲ正多角形ノ**中心**ト云ヒ, 外接圓ノ半徑ヲ正多角形ノ**半徑**ト云フ。

問　　題

(1) 圓ニ內接スル正三角形ノ各邊ハ對角ノ頂點ヲ通過スル直徑ノ四等分點ノ一ヲ通過ス。

(2) 正三角形ノ外接圓ノ直徑ハ內接圓ノ直徑ノ二倍ニ等シ。

(3) 正六邊形ノ一邊ハ其半徑ニ等シ。

(4) 正六邊形ノ一邊ヲ a トシテ其面積ヲ求メヨ。

(5) 正十二邊形ノ面積ハ其半徑上ノ正方形ノ三倍ニ等シ。

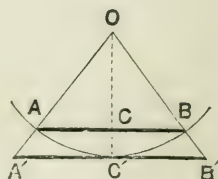
219. 定理三. 正多角形ノ面積ハ其周圍ト內接圓ノ半徑トノ乘積ノ半ニ等シ。

220. 定理四. 同邊數ノ正多角形ノ周圍ノ比ハ半徑ノ比ニ等シク面積ノ比ハ其二乘比ニ等シ。

問　題

(1) 正多角形內ノ任意ノ一點ヨリ各邊或ハ其延長ヘ下セル垂線ノ和ハ常ニ相等シ。

221. 圓ニ內接スル正多角形ノ一邊ヲ知リテ相似外接正多角形ノ邊ヲ計算スル方法及其逆。

[解法] I. AB ヲ圓ニ內接スル正多角形ノ一邊トシ之ニ垂直ナル半徑 OCC′ ヲ引キ, C′ ニ於テ切線ヲ引キ, OA, OB ノ延長トノ交點ヲ A′, B′ トスレバ A′B′ ハ相似外接正多角形ノ一邊ナリ。

$AB=a$, $A'B'=a'$, $OA=R$ トスレバ △AOB, A′OB′ ハ相似ナル故

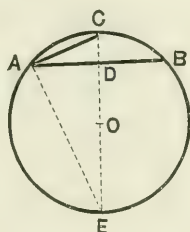
$$\frac{a'}{a}=\frac{R}{OC}.$$

而シテ直角三角形 OAC ヨリ $OC=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$.

$$\therefore \quad a'=\frac{aR}{\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}}.$$

II. 同様ニ $\frac{a}{a'}=\frac{OA}{OA'}$ ヨリ $a=\frac{a'R}{\sqrt{R^2+\frac{a'^2}{4}}}$.

222. 圓ニ內接スル正多角形ノ一邊ヲ知リテ此圓ニ內接スル二倍邊數ノ正多角形ノ邊ヲ計算スル方法及其逆。

[解法] I. ABヲ元ノ一邊トシ之ニ垂直ナル直徑 CDOE ヲ引ケバ AC ハ二倍邊數ノ內接正多角形ノ一邊ナリ。

$AB=a$, $AC=a'$, $OA=R$

トスレバ $$\overline{AC}^2=CE.CD.$$

而シテ $CE=2R$, $CD=R-OD$.

又 $$OD=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}.$$

$$\therefore \quad a'=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}\right)}.$$

II. $$2\triangle ACE=AD.CE=AC.AE.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}a.2R=a'\sqrt{4R^2-a'^2}.$$

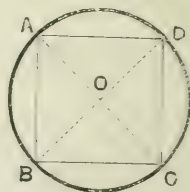
$$\therefore \quad a=\frac{a'}{R}\sqrt{4R^2-a'^2}.$$

223. 作圖題一. 正方形及正八角形ヲ作リ,且其半徑ヲ以テ其邊ヲ計算セヨ。

[解法] I. 任意ノ圓Oヲ畫キ,直交スル直徑AC BDヲ引キ其端ヲ連ヌルトキハ正方形ヲ得.

而シテ $\overline{AB}^2=2R^2$。

$\therefore \quad a_4=R\sqrt{2}$。

注意. 以下常ニ a_n ヲ以テ n 邊ノ正多角形ノ邊ヲ表ス。

II. 角AOB, BOCヲ二等分スル直徑ヲ引キ其端ト正方形ABCDノ頂點トヲ連ヌルトキハ正八角形ヲ得。

而シテ $a_8=\sqrt{2R(R-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}\times 2R^2})}$。　(222)

$\therefore \quad a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

注意. 正多角形ノ畫法ハ圓周ノ等分法ニ歸シ,圓周ノ等分法ハ四直角ノ等分法ニ歸ス,而シテ角ノ二等分法ハ常ニ成シ得ベキガ故ニ或正

多角形ヲ畫クコトヲ得バ常ニ其二倍邊數ノ正多角形ヲ作ルコトヲ得ルナリ。

224. 作圖題二. 正三角形,正六角形,竝ニ正十二角形ヲ作リ,且其半徑ヲ以テ其邊ヲ計算セヨ。

[作圖] 任意ノ圓ヲ畫キ,其半徑ニ等シキ弦ヲ作リテ正六角形ヲ畫キ,次ニ正三角形及正十二角形ヲ畫クベシ。然ラバ

$$a_6 = R. \qquad a_3 = R\sqrt{3}.$$

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

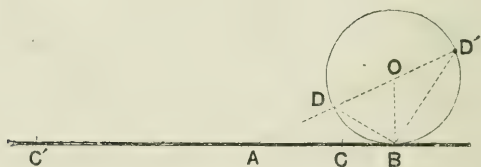
問題

(1) 圓ニ內接スル正三角形ト之ニ內接スル正六角形トノ比ヲ求メヨ。 (商船)

(2) 圓ニ內接スル正六角形ハ同圓ニ外接スル正六角形ノ四分ノ三ニ等シ。

(3) 邊10尺ノ正方形ヲ內接スベキ圓ニ內接スル正三角形ノ邊ハ幾尺ナルカ。 (盛農・陸士)

(4) 圓ニ内接及外接スル同邊數ノ正多角形ノ面積ヲ夫々P, P'トシ之ニ内接スル二倍邊數ノ正多角形ノ面積ヲQトセバ$Q=\sqrt{PP'}$ナリ。

225. 作圖題三. 線分(AB)ヲ二分シ其一部分(AC)ヲ他ノ部分(CB)ト全線分トノ比例中項タラシメヨ,且其全線分ヲ以テ各部分ヲ計算セヨ。

[作圖] AB ニ垂線 BO ヲ引キ,之ヲ AB ノ半ニ等シクシ,O ヲ中心トシ,OB ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ,A ヨリ中心線 ADD′ ヲ引キ $AC=AD$, $AC'=AD'$ トセバ C 及 C′ ハ所要ノ分點ナリ。

[證明] $\triangle ADB, ABD'$ ハ等角ナル故相似ナリ。

$$\therefore \frac{AD'}{AB}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{AC}。\quad \therefore \frac{AD'-AB}{AB}=\frac{AB-AC}{AC}.$$

然ルニ　$AD'-AB=AD'-DD'=AD=AC$。

及　$AB-AC=CB$。

$\therefore \quad \frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}$。　$\therefore \quad \frac{CB}{AC}=\frac{AC}{AB}$.

同様ニ　$\frac{C'B}{AC'}=\frac{AC'}{AB}$。

而シテ　$AC=AO-\frac{1}{2}AB$。

$AC'=AO+\frac{1}{2}AB$。

而シテ　$\overline{AO}^2=\overline{AB}^2+\frac{1}{4}\overline{AB}^2=\frac{5}{4}\overline{AB}^2$

$\therefore \quad AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$。　$AC'=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$.

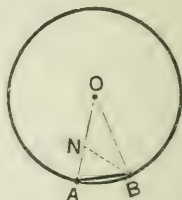
注意。線分 AB ハ C 及 C′ ニ於テ**外中比**ニ分タレタリト云ヒ,又此線分ヲ二分スル方法ヲ**黄金分割**ト云フ。

226. 作圖題四. 正十角形及正五角形ヲ作リ,且其半徑ヲ以テ其邊ヲ計算セヨ。

[解析] 正十角形ガ圓 O ニ内接セラレタリトシ AB ヲ其一邊トスレバ

$$\angle AOB=\frac{360°}{10}=36°.$$

故ニ　$\angle OAB = OBA = 72°$。

$\angle B$ ノ二等分線 BN ヲ引ケバ $\angle ABN=36°$。從テ $\triangle BAN$, OAB ハ相似ナリ。

$$\therefore \quad AN : NB = AB : AO.$$

然ルニ $\triangle ONB$, ABN ハ等脚ニシテ $ON=NB=AB$。

$$\therefore \quad AN : NO = NO : AO.$$

故ニ N ハ AO ヲ外中比ニ分ツ。

[作圖] 任意ノ圓ノ半徑 OA ヲ引キ之ヲ N ニ於テ外中比ニ分ツトキ(225), 大ナル部分 ON ハ正十角形ノ一邊ナリ.

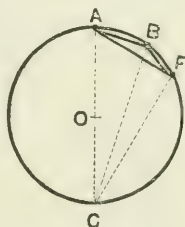
而シテ　$$a_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R. \qquad (225)$$

又　$$a_5^2=\frac{a_{10}^2}{R^2}(4R^2-a_{10}^2) \qquad (222, II)$$

$$=R^2\frac{10-2\sqrt{5}}{4}.$$

$$\therefore \quad a_5=R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

227. 作圖題五. 正十五角形ヲ作リ，且其半徑ヲ以テ其邊ヲ計算セヨ。

[作圖] 任意ノ圓ヲ畫キ之ニ內接セル正十角形及正六角形ヲ畫キ (226, 224), 其一邊ヲ夫々 AB, AF トスレバ弦 BF ハ所要ノ正十五角形ノ一邊ナリ。

[證明] 弧 BF ハ圓周ノ $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$ 卽 $\frac{1}{15}$ ナリ。

而シテ　$BF.AC+AB.CF=AF.BC.$　(215)

然ルニ $AC=2R,\ AB=R\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ AF=R.$

從テ　$CF=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AF}^2}=R\sqrt{3}.$

$$BC=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

故ニ BF 卽 a_{15} ヲ求ムレバ

$$a_{15}=\frac{R}{4}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right\}.$$

228. 以上載スル所ノ正多角形卽其邊數ガ3,4,5及其2^n倍ナルモノハ往古幾何學者ノ夙ニ作圖シ得タル所ナリ。西暦千八百一年ニ至リ*Gauss*ハ始メテ邊數ガ2^n+1ナル形ノ素數ナルトキ初等幾何學ノ方法ニヨリ,換言スレバ定木ト兩脚器トニ由リテ,其正多角形ヲ作圖シ得ベキコトヲ證明シタリ。今nヲ4トセバ2^n+1ハ17ニシテnヲ8トセバ2^n+1ハ257ナリ,其中ノ正十七角形ノ作圖法ト雖繁雜ニシテ本書ノ程度ニ於テ之ヲ說明スルヲ得ズ。正二百五十七角形ノ場合ノ如キハ是ガ作圖法ヲ得ント企テタルモノアリト雖未全カラズ。

229. 直徑1ナル圓ニ內接スルn邊ノ正多角形ノ一邊ノ長サヲ知ルトキハ之ニ內接及外接スル$2n, 4n, 8n,\ldots$邊ノ正多角形ノ周圍ヲ計算スルコトヲ得ベシ,何トナレバ$R=\dfrac{1}{2}$トスレバ第221節ヨリ$a'=\dfrac{a}{\sqrt{1-a}}$,第222節ヨリ$a'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$ヲ得テ順次ニ一邊ノ長サヲ知ルヲ得,從テ周圍ヲ計算スルコトヲ得ベケレバナリ。今正方形ノ周

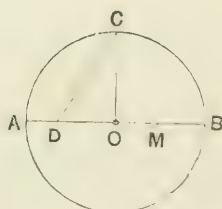
圍ヨリ起算スレバ次ノ表ヲ得。

邊　數	內接形ノ周圍	外接形ノ周圍
4	2.8284271	4·0000000
8	3.0614675	3.3137085
16	3.1214452	3,1825979
32	3.1365485	3.1517249
64	3.1403312	3.1441184
128	3.1412773	3.1422236
256	3.1415138	3.1417504
512	3.1415729	3.1416321
1024	3.1415877	3.1416025
2048	3.1415914	3.1415951

問　題

(1) 直角ノ五分ノ一ニ等シキ角ヲ作レ。

(2) 所設ノ線分上ニ正八角形ヲ作レ。

(3) 半徑OCガ直徑ABニ垂直ニシテMガOBノ中點ナルトキAB中ニD點ヲ取リMD=MCナラシムレバCDハ正五角形ノ邊ニシテODハ正十角形ノ邊ナリ。

第二章

圓周及圓ノ面積

230. 定義. 或條件ノ下ニ一定不易ノ大サヲ有スル量ヲ**定量**ト云ヒ,種々ノ大サヲ有シ得ル量ヲ**變量**ト云フ。

例ヘバ三角形ノ面積ハ變量ニシテ其內角ノ和ハ定量ナリ。

231. 定義. 變量ノ**極限**トハ其變量ノ大サヲ如何程ニテモ之ニ近迫セシムルコトヲ得ルモ決シテ之ニ等シカラシメ得ザル或定量ナリ。

例ヘバ正多角形ノ一角ハ邊數ヲ增加スルニ從ヒ如何程ニテモ平角ニ近迫スト雖全ク之ニ等シカラシムルコトヲ得ズ,卽正多角形ノ角ノ極限ハ平角ナリ。

公理 VII. 圓周ハ外接多角形ノ周圍ヨリ小ナリ。

圓周ノ長サハ此圓ニ內接スル正多角形ト外接スル正多角形トノ邊數ヲ無限ニ增ストキ其周圍ノ近迫スベキ共通極限ナリ。

232. 定理五. 二圓周ノ比ハ其半徑ノ比ニ等シ。

[證明] 所設ノ二ツノ圓周ノ長サヲ夫々P, P'トシ半徑ヲ夫々R, R'トシ,此等ノ二ツノ圓周內ニn邊ノ正多角形ヲ畫キ其周圍ヲp, p'トスレバnノ値ニ係ラズ,

$$p : p' = R : R'.$$

nヲ無限ニ增ストキハ變量p及p'ノ極限ハ夫夫P及P'ナリ。

$$\therefore \qquad P : P' = R : R'.$$

系一. 圓周ノ其直徑ニ對スル比ハ一定ナリ。

其故ハ $\dfrac{P}{P'}=\dfrac{R}{R'}$, 從テ $\dfrac{P}{2R}=\dfrac{P'}{2R'}$ ナレバナリ。

注意。此比ハ不盡數ニシテ之ヲ示スニ通常 π ヲ以テシ之ヲ**圓周率**ト云フ。

系二. 半徑 R ノ圓周 P ハ $2\pi R$ ニ等シ。

233. 圓周率ノ近似値ヲ求ムル方法。

$R=1$ トセバ $P=2\pi$, 卽 $\frac{1}{2}P=\pi$ ナリ。然ルニ圓周ハ之ニ外接スル正多角形ノ周圍ト之ニ內接スル正多角形ノ周圍トノ間ニアルヲ以テ

$$3.1415914<\pi<3.1415951$$

ナルコトヲ知ル (229)。故ニ小數第五位迄正シキ π ノ近似値ハ 3.14159 ナリ。

注意。π ノ近似値トシテハ通例 3.1416 又ハ $\frac{22}{7}$ 或ハ $\frac{355}{113}$ ヲ用フ。

又 $\frac{1}{\pi}$ ノ近似値ハ 0.3183 ナリ。

234. 半徑ト等長ナル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ大サヲ求ムル方法。

所要ノ角ノ大サヲ ω トセバ中心角ノ比ハ其弧ノ比ニ等シキ故

$$\omega : 180^\circ = R : \pi R,$$

$$\therefore \quad \omega = 180^\circ \times \frac{1}{\pi}$$

$$= 57^\circ 17' 45''.$$

注意。此中心角ハ理論的數學ニ於テ測角ノ單位トシテ用ヒラル。之ヲ**レーヂアン**(*Radian*)ト云ヒ,此測角法ヲ**弧度法**ト云フ。

問題

(1) n度ノ角ハ$\frac{n\pi}{180}$「レーヂアン」ニ等シ。

(2) 30° ノ弧ノ長サガ一尺ナルトキハ半徑ノ長サ如何。

(3) 半徑3·256尺ナル圓周ノ長サヲ求メヨ。

(4) 若干ノ圓周ノ和ニ等シキ圓周ヲ畫ケ。

235. 公理 VIII. 圓ノ面積ハ之ニ內接スル正多角形ノ邊數ガ無限ニ增ストキ其面積ノ近迫スベキ極限ナリ。

236. 定理六. 圓ノ面積ハ圓周ト半徑トノ乘積ノ半ニ等シ。

[證明] 圓ニ內接スル正多角形ノ面積周圍及之

ニ內接スル圓ノ半徑ヲ夫々 s, p, r ニテ表シ圓ノ面積,圓周及半徑ヲ夫々 S, P, R ニテ表セバ多角形ノ邊數ヲ無限ニ增ストキハ s, p, r ハ S, P, R ニ近迫ス。

然ルニ　　$s=\frac{pr}{2}$。

故ニ極限ニ於テ　　$S=\frac{PR}{2}$。

系一. 半徑 R ノ圓ノ面積 S ハ πR^2 ニ等シ。

系二. 圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ比例ス。

系三. 扇形ノ面積ハ半徑ト弧トノ乘積ノ半ニ等シ。

問　　題

(1) 半徑ガ R, R′ナル同心圓周ノ間ニ生ズル圓環ノ面積ハ小圓ニ切スル大圓ノ弦ヲ直徑トセル圓ノ面積ニ等シ。　(商船)

(2) 兩圓ノ面積ノ和又ハ差ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ畫ケ。

(3) 周圍 P ナル圓ノ面積 S ハ $\frac{P^2}{4\pi}$ ニ等シ。依テ周圍10米ノ圓ノ面積ヲ求メヨ。

(4) 半徑ガRナル扇形ノ角ヲd度トセバ其面積ハ$\frac{d}{360}\pi R^2$ナリ。

第五篇 雜題

(1) 甲乙二ツノ正多角形アリ,甲ノ邊數ハ乙ノ邊數ノ二倍ニシテ甲ノ一角ト乙ノ一角トハ九ト八トノ如シ。甲乙ノ邊數各如何。 (海兵)

(2) 同ジ圓ニ內接セル正六角形ト正三角形トノ邊上ニ作レル正方形ノ面積ヲ比較セヨ。(同上)

(3) 半徑五寸三分ナル圓ノ周,面積及之ト等面積ノ正方形ノ一邊ヲ求ム。但$\pi=3.14$トシ有効數字三位ヲ要ス。 (同上)

(4) 與ヘラレタル綱若干尺アリ,之ヲ以テ周邊トシ正方形ヲ作ルトキハ其面積324平方尺ナリ。之ヲ以テ周邊トシ正六邊形ヲ作レバ其面積ハ幾許ナルカ。 (同上)

(5) 半徑一尺ノ圓ニ外接スル正六邊形ト之ニ內接スル正六邊形トノ差ヲ求メヨ。 (東師)

(6) 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ下セル垂線ニテ分タレタル兩三角形ノ內接圓ノ面積ノ比ハ斜邊ノ二部分ノ比ニ等シ。

(7) 一邊ノ長サガ一尺ナル正方形ニ內接スル圓ト一邊ノ長サガ二尺四寸ナル正三角形ニ內接スル圓トハ何レガ大ナルカ。 (海機)

(8) 半徑二尺ノ三圓相切ス,其間ニアル三邊形(三邊ハ各圓弧ヨリ成ル)ノ面積ヲ計算セヨ。

(東工)

(9) 同心圓アリ,其圓周ハ夫々44尺及33尺ナリ;然ラバ其間ニアル圓環ノ幅幾許ナルカ。

(10) 角 $22°\ 30'$, 半徑25寸ナル扇形ノ面積ヲ求メヨ。

(11) 半徑15尺ノ圓ニ內接スル正十二邊形ノ一邊ガ張レル弧ノ長サヲ計算セヨ。

(12) 定圓ヲ二ツノ同心圓ニテ三等分セヨ。定圓ノ半徑ヲ9尺トシ同心圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

(海兵)

(13) 面積100坪ノ圓ノ直徑ハ幾尺ナルカ。

附録一

雜題

---

(1) A, B, C ヲ順次ニ一直線中ニ並列スル三點トシ BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 L, M, N トセバ

$$MN=\frac{1}{2}BC,\quad NL=\frac{1}{2}CA,\quad LM=\frac{1}{2}AB。$$

(2) 角 AOB ノ二等分線ヲ OM トシ, ON ヲ角內ノ一直線トスレバ角 MON ハ二角 AON, BON ノ差ノ半ニ等シ。

又 ON′ ヲ角 AOB 外ノ直線トセバ如何。

(3) 凸多角形ノ周圍ハ之ヲ包圍セル任意ノ平面形ノ周圍ヨリ小ナリ。

(4) 四點ハ最多數ニテ六線ヲ決定シ,四線ハ最多數ニテ六點ヲ決定ス。

(5) 三角形ノ頂角ノ二等分線ガ底ヲ二等分スルトキハ二邊ハ相等シ。

(6)　二邊及一中線ヲ等シクスル兩三角形ハ合同ナリ。(二ツノ場合アリ)。　(大豫)

(7)　三角形ABCノ底邊BCヲDマデ延長シテCD=ABナラシムルトキBC<AD。

(8)　正三角形ノ兩底角ノ二等分線ノ交點ヲ過ギ二邊ニ平行ナル二線ハ底ヲ三等分ス。

(9)　三角形ノ三邊BC, CA, ABノ上ニ外方ニ向テ畫ケル正三角形ノ頂點ヲ夫々A′, B′, C′トスレバAA′=BB′=CC′。　(商船)

(10)　五角形ノ邊ヲ延長シテ星形ヲ作ルコトヲ得バ交點ニ於ケル角ノ和ハ二直角ニ等シ。

(11)　對角線ノ總數20ナル凸多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

(12)　三角形ABCノ一角Bノ外二等分線ト邊ACトガ相交ルトキ,其交角ハAトCトノ差ノ半ニ等シ。

(13)　三角形ノ二ツノ底角ノ外二等分線ハ必相交リ,其交角ハ兩底角ノ和ノ半又ハ頂角ノ半分ノ餘角ニ等シ。　(商船)

(14)　三角形 ABC ニ於テ BE, CD ヲ二中線トシ, BE ニ平行ナル DF ヲ引キ, AB ニ平行ナル EF ヲ引キ F ニ於テ會セシメ CF ヲ引クトキ △CDF ノ三邊ハ夫々 △ABC ノ三中線ニ等シ。（東師）

注意。此定理ニ由リ三中線ヲ知リテ三角形ヲ畫クコトヲ得。

(15)　四邊形ノ四角ノ二等分線ガ同一ノ點ヲ通過スルトキ一雙ノ對邊ノ和ハ他ノ一雙ノ對邊ノ和ニ等シ。

(16)　凸四角形ニ於テ, [1] 二隣角ノ二等分線ノ交角ハ他ノ二角ノ和ノ半ニ等シク, [2] 二對角ノ二等分線ノ交角ハ他ノ二角ノ差ノ半ニ等シ。

（東師）

(17)　等脚梯形ノ對角線ハ相等シ。逆ニ對角線ガ相等シキ梯形ハ等脚ナリ。

(18)　三角形ノ頂角ノ二等分線ト此頂點ヨリ底ニ至ル垂線トニテ成ル角ハ兩底角ノ差ノ半ニ等シ。（大豫）

(19)　矩形又ハ等脚梯形ノ四邊ノ中點ヲ順次ニ連ネテ生ズル四邊形ハ菱形ナリ。

(20) 平行ナラズシテ相等シキ二線分AB,CDガ平行線AC,BDノ間ニアリテO點ニ於テ相交ルトキ OA=OC 及 OB=OD ナリ。

(21) 矩形ノ二邊ノ間ニ夾マレタル線分ハ對角線ヨリ小ナリ。

(22) 三角形ノ頂角ノ二等分線ニ垂直ナル任意ノ直線ガ底トナス角ハ兩底角ノ差ノ半ニ等シク又二邊トナス角ハ兩底角ノ和ノ半ニ等シ。

(23) 四邊形ノ二組ノ對邊ノ中點ヲ連ヌル二直線ト對角線ノ中點ヲ連ヌル直線トハ同一ノ點ヲ通過ス。　(東師)

(24) 三角形ノ各邊ヲ對角線トシ所設ノ二直線ニ平行ナル邊ヲ有スル三ツノ平行四邊形ヲ作ルトキハ此等ノ四邊形ノ他ノ對角線ハ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ。　(陸士)

(25) 所設ノ二直線ニ至ル距離ノ和,又ハ差ガ一定不易ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。(商船·海兵·海經)

(26) 平行四邊形ABCDノ周圍ハ一定不易ニシテA點ハ固定シ,二隣邊AB, ADノ方向一定セルトキハC點ノ軌跡如何。

(27) 同底等高ナル三角形ノ中ニテ等脚三角形ノ周圍ガ最小ナリ。　(海機)

(28) 三角形ABCノCニ於ケル外角ノ二等分線上ノ一點DヲA及Bニ結ビツクレバ三角形ABDノ三邊ノ和ハ三角形ABCノ三邊ノ和ヨリ大ナリ。　(陸主)

(29) 互ニ相交ルベクシテ延長スルコトヲ許サザル二定直線ノ交點(未知)ヲ通過シ,且其夾角ヲ二等分スベキ直線ノ位置ヲ求メヨ。

(30) 三角形ノ二邊ガ不等ナルトキ頂角ノ二等分線ハ垂線ト中線トノ間ニ在リ。

(31) 梯形ノ兩對角線ノ中點ヲ連ヌル直線ハ底ニ平行ニシテ兩底ノ差ノ半ニ等シ。

(32) 四邊ノ長サヲ知リテ梯形ヲ畫ケ。(大工)

(33) 所設ノ正方形ニ內接シテ他ノ正方形ト合同ナル正方形ヲ畫ケ。

(34) 平行線X,Y及其外ノ兩側ニアル二點A Bヲ與ヘ,折線AMNBヲ最小ナラシメ且MNハ一定ノ方向ヲ有スベキ二點M,Nヲ此平行線中ニ求メヨ。　(農實)

(35) 鋭角BAC及其角内ニアル一點Oヲ與ヘ $OM+MN+NO$ ヲシテ最小ナラシムベキ點M,Nヲ夫々AB, AC上ニ求メヨ。 (陸士)

(36) 矩形ノ玉突臺上ニ二球アリ。其一ヲ突キ四邊ニ當テタル後他ノ球ノ位置ニ來ラシムベキ通路ノ方向ヲ求メヨ。 (農實)

(37) 奇數邊數ノ凸多角形ノ各邊ノ中點ノ位置ヲ知リテ本形ヲ作圖セヨ。

(38) 一定點ヲ通過シ二定線ノ交點(此點ヲ用フルヲ許サズ)ニ達スベキ直線ヲ引ケ。

(39) 三角形ノ三頂點A, B, C及重心Gヨリ本形ニ交ラザル線Lヘ垂線 AA', BB', CC', GG' ヲ引クトキ $AA'+BB'+CC'=3GG'$ (専門)

Lガ $\triangle ABC$ ヲ截ル場合及重心ヲ過グル場合ヲ吟味セヨ。 (東工)

(40) 直線外ノ點Aヨリ此線ニ垂線AB及斜線AC, AD, AE,……ヲ其垂線ノ同側ニ引キ角BAC, CAD, DAE,……ヲ等シカラシムレバ

$$BC < CD < DE < \cdots\cdots$$

(41)　三角形ABCニ於テB角及C角ノ二等分線ガ夫々D及Eニ於テ對邊ト交リB角ハC角ヨリモ大ナリトスレバBDハCEヨリモ小ナルコトヲ證セヨ。　　　　（盛農）

(42)　矩形ノ定木ノミヲ用ヒテ所設ノ角ヲ二等分セヨ。

(43)　矩形ノ定木及三角定木ノミヲ用ヒテ線分ノ中點ヲ求メヨ。

(44)　正方形ノ對角線中ノ一點ヲ通過シ二隣邊ニ平行ナル線ヲ引クトキ四邊トノ交點ハ同一ノ圓周上ニ在リ。

(45)　A, B, C, A′, B′, C′ガ順次ニ同一ノ圓周上ニアル點ニシテ弦AB, AC′ガ夫々A′B′, A′Cニ平行ナルトキBCハB′C′ニ平行ナリ。

(46)　圓ノ直徑BAヲPマデ延長シAPヲ半徑ニ等シクシAニ於テ引ケル切線AEDトPヨリ引ケル切線PEC (Cハ切點ナリ)トノ會點ヲEトス, BトCトヲ結ビ之ヲ延長シAEDトDニ於テ會セシム,然ルトキハ△DECハ正三角形ナルコトヲ證セヨ。　　　　（大工）

(47)　等圓ガ互ニ外切シ且夫々直交スル二直線ノ一ニ切シテ動クトキ切點ノ軌跡如何。

(48)　圓周上ノ一點Aヨリ引ケル二弦ヲAB, ACトシ,角BACノ外角ヲ二等分スル直線ガ圓周ト交ル點ヲDトスレバ,弦BD, CDハ相等シキコトヲ證セヨ。　(長商)

(49)　三角形ABCノ內心Oト頂點Aトヲ過グル直線ガ此三角形ノ外接圓ノ周ト交ル點ヲPトスルトキPB, PC, POハ相等シキコトヲ證セヨ。

(仙工)

(50)　圓ノ內接四邊形ノ一雙ノ對邊ト等角ヲ爲ス線ハ殘ノ一雙ノ對邊トモ等角ヲナス。(海機)

(51)　三角形ノ三邊上ニ外方ニ向テ畫ケル正三角形ノ外接圓ハ一點ヲ通過ス。又其三中心ハ正三角形ノ頂點ヲ爲ス。

(52)　圓ニ內接スル四邊形ノ二組ノ對邊ノ夾角ノ二等分線ハ互ニ垂線ナリ。

(53)　ABCヲ圓ニ內接スル正三角形トシ,Pヲ弧BC中ノ一點トセバ弦APハBP, CPノ和ニ等シ。又其逆ヲ證明セヨ。　(大豫·商船·神商·東師·農實)

(54)　圓ノ弧BCノ中點Mヨリ二弦MA,MDヲ引キ弧BCトE,Fニ於テ交ラシムルトキ四點A,D,F,Eハ同一ノ圓周上ニアリ。

(55)　ABCDヲ圓ニ內接スル四邊形トスレバ三角形ABC,BCD,CDA,DABノ垂心ヲ頂點トスル四邊形ハ原四邊形ト合同ナリ。

(56)　圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通過シ二對邊ノ交角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ハ對角線ノ交角ヲ二等分ス。

(57)　三角形ノ三邊ノ中點ト三垂線ノ足ト垂心ヨリ三頂點ニ至ル直線ノ中點トハ同一ノ圓周上ニ在リ。　(盛農・大豫)

注意．此圓ヲ三角形ノ**九點圓**ト云フ。

(58)　九點圓ノ中心ハ垂心ト外心トノ間ノ線分ノ中點ニシテ其直徑ハ外接圓ノ半徑ニ等シ。

(59)　二圓周ノ交點Aヲ過ギテ二割線MN,M′N′ヲ引キ圓トノ交點ヲM,M′,N,N′トスレバMM′及NN′ノ夾角ハ常ニ兩圓ノ夾角ニ等シ。又M,Nニ於ケル二圓周ノ切線ノ間ノ角ハ割線MANノ位置ニ關セズ一定不易ナリ。　(陸士)

(60) A, B, C ヲ圓周上ノ三點トシ弧 AB, AC ノ中點ヲ D, E トシ直線 DE ト弦 AB, AC トノ交點ヲ F, G トスルトキ AF=AG ナリ。 (海機)

(61) 三角形ノ底ノ位置ト大サトガ一定シ,又二邊ノ差ガ一定ナルトキ底ノ兩端ヨリ頂角ノ內二等分線ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ハ圓ナリ。

(62) 三角形ノ底ノ位置ト大サトガ一定シ,又二邊ノ和ガ一定ナルトキ頂角ノ外二等分線上ニ投ズル底ノ兩端ノ射影ノ軌跡如何。

(63) 圓外ノ一點 P ヨリ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ A 及 B トシ, A ヲ過グル任意ノ弦 AQ ニ平行ナル直線 PR ト直線 QB トノ交點ヲ R トス, R ノ軌跡ヲ求メヨ。 (仙工)

(64) 所設ノ圓周上ニ中心ヲ置キ,一定ノ半徑ヲ有スル圓ヲ作リ,之ニ一定ノ方向ノ切線ヲ引クトキ其切點ノ軌跡如何。 (七高)

(65) 弓形 ABD ノ弧上ニ兩端ヲ有スル定長ノ動弦 BC アリ。弓形ノ弦 AD ノ兩端ヲ B, C ニ連ヌレバ BC ノ位置ニ拘ラズ其夾角ハ一定不易ナリ。 (商船)

(66)　所設ノ圓ヲ圍繞スルニハ之ニ等シキ圓幾個ヲ要スルカ,但各圓ハ皆原圓及兩隣圓ニ外切ス。

(67)　△ABCノ外心ヲOトシ,弧BCノ中點ヲMトスレバ角AMOハ$\frac{1}{2}$(B〜C)ニ等シ。

(68)　次ノ既知件ヲ以テ三角形ヲ作レ。

[1]　二邊ノ和ト頂角ト底邊。(海機・商船・專門)

[2]　二邊ノ差ト頂角ト底邊。(大豫・陸士・東商)

[3]　二邊ノ差ト兩底角ノ差ト底邊。(東商)

(69)　三角形ノ底ノ大サ及位置ガ一定シ,且底ノ一端ヨリ出ヅル中線ノ長サガ一定スルトキ頂點ノ軌跡如何。

(70)　一邊ヲ知リテ所設ノ圓ニ外接スル菱形ヲ畫ケ。

(71)　圓周上ノ所設ノ二點A及Cヲ過ギ,互ニ平行ナル二弦AB及CDヲ引キ其和ヲシテ最大ナラシメヨ。(水產)

(72)　所設ノ圓內ノ所設ノ點Oヲ過ギ弦AOBヲ引キAO, BOノ差ヲシテ所設ノ直線ニ等シカラシメヨ。(水產)

(73)　所設ノ扇形ニ內接スル圓ヲ畫ケ。

(74)　定點ヲ過ギテ直線ヲ引キ,定角ノ二邊ヲ截リテ生ズル所ノ三角形ノ周圍ヲシテ所設ノ線分ニ等シカラシメヨ。

(75)　定線上ニ一點ヲ求メ之ヨリ定圓周ニ至ル切線ノ長サヲ既知ノ有限直線ニ等シカラシメヨ。

(76)　次ノ既知件ヲ以テ三角形ヲ畫ケ。

[1]　周圍ト高サト頂角。

[2]　頂角ト其二等分線ト高サ。

(77)　所設ノ弓形ノ弧上ニ一點ヲ求メ,之ヨリ弦ノ兩端ニ至ル距離ノ和又ハ差ヲ既知ノ線分ニ等シカラシメヨ。

(78)　三角形ノ三邊ヲ等角ノ下ニ見ル點ヲ求ム。不能ノ場合アリヤ。

(79)　圓ト其外部ノ一點トヲ與ヘ,之ヲ中心トシ此圓ヨリ既知ノ長サノ弦ヲ截リ取ル圓ヲ畫ケ。

(80)　四定點ヨリ等距離ニアル圓周ヲ畫ケ。

(81)　三ツノ平行直線上ニ夫々三頂點ヲ有スル正三角形ヲ畫ケ。

(82)　三ツノ同心圓上ニ夫々三頂點ヲ有スル

正三角形ヲ畫ケ。

(83)　*Simson* ノ定理ノ逆(頁137雜題13)ヲ應用シテ所設ノ四直線ヘ下セル垂線ノ足ガ同一ノ直線上ニアルベキ點ヲ求メヨ。

(84)　三定點ヲ中心トシ,互ニ相切スル圓周ヲ畫ケ。

(85)　正方形ノ二邊又ハ三邊ヲ等角ノ下ニ見ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(86)　所設ノ直線上ニ一點ヲ求メ,之ヨリ所設ノ二圓周ニ至ル切線ヲシテ此直線ト等角ヲ爲サシメヨ。　(對稱法)

(87)　所設ノ弓形ノ弧上ニ一點ヲ求メ,之ヨリ弦ノ兩端ニ至ル距離ノ和ヲ最大ナラシメヨ。

(88)　所設ノ四邊形內ニ一ツノ點ヲ求メ其點ヨリ各邊ニ下セル垂線ノ趾ヲ結ビ付クル直線ヲシテ平行四邊形ヲナサラシメヨ。

(89)　所設ノ四邊形ニ外接スル正方形ヲ畫ケ。
(商船)

(90)　四邊及一對ノ對邊ノ中點ヲ連ヌル直線ノ長サヲ知リテ四邊形ヲ畫ケ。

(91)　所設ノ角BACノ二邊上ニ夫々點B, Cヲ取リ, AB及ACノ和又ハ差ヲ一定ナラシムルトキ三角形ABCノ外心ノ軌跡ハ直線ナリ。

(92)　次ノ既知件ヲ以テ三角形ヲ畫ケ。

[1]　三垂線ノ足。

[2]　一角ト之ヨリ對邊ニ至ル中線ト垂線。

[3]　底ト二邊ノ和或ハ差ト內接圓ノ半徑。

(93)　定角ノ一邊上ニ定點Aアリトシ,他ノ邊上ニ二點B, Cヲ求メ, BCヲ既知ノ線分ニ等シクシ,且BACヲ直角ナラシメヨ。

(94)　二定圓周ノ間ニ定方向ヲ有スル既知ノ長サノ直線ヲ引ケ。

(95)　定直線XYノ同側ニ二點A, Bヲ與ヘ此線上ニ一點Cヲ求メ角ACXヲBCYノ二倍ナラシメヨ。

(96)　直角三角形ノ二邊AB, ACヲ直徑トシテ圓ヲ畫クトキ,此二圓周ハ斜邊BCノ中點ヲ中心トシAB+ACヲ直徑トスル圓ニ切ス。

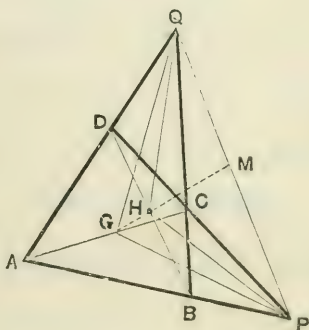
(97)　四邊形ノ四邊ノ中點ヲ順次ニ連ネテ生ズル所ノ平行四邊形ハ原形ノ半ニ等シ。(海兵·商船)

(98)　同底ヲ有シ其同側ニ立テル兩三角形ノ二邊ノ中點ヲ連ヌルトキ平行四邊形ヲ得,而シテ其面積ハ兩三角形ノ差ノ半ニ等シ。

(99)　同底ノ上ニ立ツ二ツノ等積三角形ヲ底ニ平行ナル直線ニテ截ルトキ各二邊間ニ夾マレタル割線ノ部分ハ相等シ。

(100)　四邊形ABCDノ對邊ノ交點ヲP,Qトシ,對角線AC,BDノ中點ヲG,Hトスレバ,△PGH,QGHハ何レモ四邊形ABCDノ四分ノ一ニ等シ。

[略解]　邊AD,BCノ中點ヲK,LトシHK,GK,HL,GLヲ引キ又GLヲ延長シテCPニ會セシメ雜題98ヲ引用セヨ。

注意.　六點A,B,C,D,P,Qニ於テ交ル四直線ニテ成レル形ヲ**完全四邊形**ト云ヒPQヲ其**第三對角線**ト云フ。

(101)　完全四邊形ノ三對角線ノ中點ハ同一ノ直線上ニアリ。

(102)　平行四邊形ABCDノD點ヲ過ギリ直線ヲ引キ邊BCトE點ニ於テ又邊ABノ延長トF點ニ於テ交ハラシメバ△ABEト△CEFハ等面積ナルコトヲ證明セヨ。　(名工)

(103)　△ABCノ中線ヲAD, BE, CFトスレバ

$$4\overline{AD}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2,$$

及　$3(a^2+b^2+c^2)=4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)$。(商船)

(104)　一定ノ面積ヲ有スル矩形ノ中ニテ最小ナル周圍ヲ有スルモノハ正方形ナリ。

(105)　所設ノ角内ノ定點ヲ通過スル直線ヲ引キ,角ノ二邊ト成セル所ノ三角形ノ面積ヲ最小ナラシメヨ。　(東工)

(106)　同底等積ナル三角形ノ中ニテ等脚ナルモノノ周圍ガ最小ナリ。　(陸士)

(107)　四邊形ノ四邊上ノ正方形ノ和ハ其兩對角線上ノ正方形ノ和ヨリ大ナルコト對角線ノ中點ヲ連ネタル直線ノ上ノ正方形ノ四倍ナリ。

(108)　A, B, C, Dヲ同一ノ直線上ニアル四點ト

スレバ

$$AB.CD+BC.AD=AC.BD。\qquad (Euler)$$

(109)　△ABCノ角Cガ60°ナルトキ

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-AC.CB。$$

角Cガ120°ナルトキハ如何。

(110)　所設ノ線分ヲ二部ニ分チ,其平方ノ和或ハ差ヲ所設ノ平方ニ等シカラシメヨ。　(海機)

(111)　直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ長サガa, bナルトキハ斜邊ノ四等分點ヲ直角頂ニ結ビツクル三直線ノ長サハ各幾許ナルカ。　(海機)

(112)　三角形ABCノ底邊BCノ上ニ一點Dヲ設ケテBDヲCDノ半分ニ等シカラシムルトキハ　$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6\overline{BD}^2+3\overline{AD}^2$。　(商船)

(113)　Gヲ三角形ABCノ重心トシPヲ任意ノ點トスレバ　(海機)

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\overline{PG}^2。$$

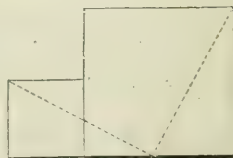
(114)　所設ノ二圓周ニ至ル切線ノ長サガ相等シキ點ノ軌跡ハ直線ナリ。

注意。 本題ハ第203頁問題2ノ一般ナル場合ニシテ此直線ヲ兩圓ノ**根軸**ト云フ。兩圓相交

ルトキ其根軸ハ交點ヲ通過スル直線ニシテ兩圓相切スルトキ其根軸ハ切點ニ於ケル共通切線ナリ。

(115)　三ツノ圓ヲ二ツ宛取ルトキ生ズル根軸ハ同一ノ點ヲ通過ス。

注意。此點ヲ三ツノ圓ノ**根心**ト云フ。

(116)　接續セル二線分ノ上ニ各正方形ヲ畫キ,生ズル所ノ六邊形ヲ三部ニ分チ,之ヲ接合シテ正方形ヲ作レ。

注意. 本題ヨリ *Pythagoras* ノ定理ノ別證ヲ得ベシ。

(117)　二邊ノ長サガ十寸及八寸ナル矩形アリ. 今此矩形ノ四邊ヲ底トシテ形外ニ四ツノ等邊三角形ヲ作リ此等ノ頂點ヲ順次ニ結ビ付ケヨ。然ルトキ作リ得タル四邊形ノ面積ハ幾平方寸ナルカ。　(海機)

(118)　正方形ノ周圍ハ等積ナル他ノ平行四邊形ノ周圍ヨリ小ナリ。

(119)　頂角及二邊ノ和ガ一定不易ナル三角形ノ中,其二邊ノ相等シキモノガ最大面積ヲ有ス。

（海機・大工）

(120)　等角等周ナル平行四邊形ノ中ニテ菱形ノ面積ガ最大ナリ。

(121)　四邊形ノ一對角線ガ他ノ對角線ヲ二等分スル場合ヲ除キテハ其形内ノ一點ヨリ四頂點ニ至ル直線ニテ之ヲ四個ノ等積三角形ニ分ツヲ得ズ。

(122)　三角形ABCニ於テB角ガ直角ノ半分ナルトキ邊ABノ中點ヲDトシ頂點CヨリABニ下シタル垂線ノ足ヲEトセバ$\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2)$ナリ,之ヲ證セヨ。　（東師）

(123)　圓ノ直徑ヲABトシ之ニ平行ナル弦ヲCDトシ,PヲAB中ノ一點トスレバ

$$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2.$$

（盛農）

(124)　直角三角形ABCノ斜邊BCニ平行ナル直線DEヲ二邊ノ間ニ引クトキ

$$\overline{CD}^2+\overline{BE}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2.$$

(125)　直角三角形ノ一邊ノ中點ヨリ斜邊ヘ垂

線ヲ引ケバ此垂線ニテ分タレタル斜邊ノ二部分ノ平方ノ差ハ他ノ一邊ノ平方ニ等シ。

(126) 正方形内ノ一點ヨリ四頂點ヘ直線ヲ引キ,又四邊ニ垂線ヲ下ストキハ前ノ四線ノ平方ノ和ハ後ノ四線ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シ。 又其和ガ最小ナルベキ點ノ位置ヲ求メヨ。

(127) 矩形ノ一頂點ガ固定シ,之ニ隣レル二頂點ガ定圓上ニ沿フテ動クトキ第四ノ頂點ノ軌跡如何。

(128) ABCD ヲ矩形トシ O ヲ三角形 ABC ノ内心トシ, O ヨリ AD, DC ヘ垂線 OE, OF ヲ引クトキ矩形 OEDF ハ全形ノ半ニ等シ。 (商船)

(129) 次ノ既知件ヲ以テ三角形ヲ作レ。

[1] 一角ト高サト面積(第204頁脚註參照)。

[2] 頂角ト其一邊ニ應ズル中線ト面積。

[3] 面積ト内接圓ノ半徑ト一傍接圓ノ半徑。

(130) 三定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定不易ナルガ如キ點ノ軌跡如何。

(131) 等脚梯形ノ二底邊ノ矩形ト一脚ノ平方トノ和ハ對角線ノ平方ニ等シ。

(132)　所設ノ直線 AB ヲ雙方ニ延長シテ矩形 CA. AD 及 CB. BD ヲ夫々所設ノ大サニ等シカラシメヨ。又 AB=12 寸, CA. AD=4 平方寸, CB. BD =49 平方寸トシテ CA, BD ノ長サヲ求ムベシ。

(商船)

(133)　比例 $a:b=c:d$ ニ於テ a ガ最大ナルトキ $a+d>b+c$。

(134)　正五角形ノ對角線 AC,BD ノ交點ヲ O トセバ BC ハ AC, CO ノ比例中項ナリ。　(海機)

(135)　圓ノ直徑ハ任意ノ切線及切點ヲ過グル垂線ニテ調和ニ分タル。　(海兵)

(136)　一點 A ヨリ圓 O ヘ割線 AMN ヲ引キ,次ニ此點ヲ過グル中心線 ABC ニ關スル N ノ對稱點 N′ ヲ M ニ連ヌルトキ,此線ト直徑トノ交點 D ハ三點 A, B, C ト共ニ調和列點ヲ爲ス。

(137)　三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ニ交ル點ヲ P トシ又頂角 A ノ外角ノ二等分線ガ BC ノ延長ニ交ハル點ヲ Q トセヨ。今 PQ ノ中點ヲ O トシ下ノ二件ヲ證セヨ。

[1] $OB.OC=\overline{OA}^2$。[2] $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$。(海機)

(138) 三角形 ABC ノ邊 BC ヲ延長シテ BC ニ等シク CD ヲ取リ,點 D ヲ AC ノ中點 E ニ結ビ DE ヲ延長シテ AB ト F ニ會セシム。FE ト ED トノ比ヲ求メヨ。 (東工)

(139) 圓周上ニ弧 AB, BC, CD, DA ヲ次第ニ小サク取ルトキハ弦 BD ガ弦 AC ヨリ大ナリ。(海機)

(140) 三角形ノ底ト頂角トガ一定ノ大サナルトキハ二底角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ結ベル直線ノ長サハ不變ナリ。 (海機)

(141) 定圓周上ナル一定點ヨリ互ニ直角ナル二弦ヲ引キ其和ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメヨ。 (商船)

(142) 圓ニ內接スル矩形ノ最大ナルモノヲ求メヨ。 (海機)

(143) 一點 P ヲ過グル圓ヲ畫キ直線 OQ ト S, T ニ交ラシメテ OS, OT ノ比ヲ與ヘラレタル比ニ等シカラシメヨ。

(144) 底邊,高サ,二邊ノ和ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。 (陸測)

(145) 相交ル二圓ノ共通弦ノ一點 C ヲ過ギテ

直線ABCDEヲ引キ一ツノ圓トノ交リヲA, D, 他ノ圓トノ交リヲB, Eトスルトキハ

$$AB:BC::ED:DC。$$ （陸士）

(146)　OA, OBハ中心Oナル一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル半徑DEハ任意ノ弦ナリ, BD, BEガAOト夫々F及Gニ於テ交ハレバ三角形BFG, BDEハ相似ナルコトヲ證セヨ。（大豫）

(147)　△ABCニ於テAC＞BCトシ對邊ヘ垂線AD, BEヲ下ストキハAC＋BE＞BC＋ADナルコトヲ證セヨ。（商船）

(148)　三角形ノ各頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル三ツノ直線ガ同一點ヲ過ギ此點ニ於テ相等シキ矩形ヲ包ム分ニ分タルルトキハ此點ハ此三角形ノ垂心ナルコトヲ證セヨ。（專門）

(149)　等積ナル直角二等邊三角形ト等邊三角形トノ底ノ比如何。（海機）

(150)　直角三角形ABCノ邊ABヲACヨリ大ナリトシ斜邊BC上ニBD＝BAヲ取リ三角形ヲ二等分スル直線ヲDEトスレバ

$$BE=DE=\frac{1}{2}BC。$$ （商船）

(151)　C ヲ直角トセル三角形 ABC ノ A 角ノ二等分線ト對邊 BC トノ交點ヲ D トス,此三角形ノ面積6平方寸,邊 AC ノ長サ4寸ヲ知リ直線 AB 及 AD ノ長サヲ求メヨ。　(海兵)

(152)　A ニ於テ內切スル兩圓アリ,今小圓周上ノ一點 D ニ於テ之ニ切スベキ大圓ノ弦 BC ヲ引キ AB, AC ヲ結ビ AB, AC ガ小圓周ニ交ル點ヲ P, Q トスレバ DC. AP=DB. AQ ナリ,之ヲ證セヨ。

(153)　圓外ノ一點ヨリ其圓ニ二ツノ切線ト一ツノ割線トヲ引クトキ二ツノ切點ヲ割線ノ二交點ト結ビ付ケテ成ル四邊形ニ於テハ兩對邊ノ包ム矩形ハ全ク相等シキコトヲ證明セヨ。(山商)

(154)　直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ノ中點 D ヨリ垂線 DEF ヲ立テヽ二邊ト交ラシメ又 AD ヲ引クトキハ $\overline{AD}^2=DE.DF$ ナリ。　(東師)

(155)　正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ニアル任意ノ一點 P ト點 A トヲ結ブ直線ガ邊 BC ト點 E ニ於テ交ルトセバ, (*a*) 三角形 ABP, PEC ハ相似ナルコトヲ證シ,依リテ, (*b*) $\overline{PA}^2=\overline{AC}^2+PB.PC$ ナルコトヲ證セヨ。　(大豫)

(156)　一直線MNノ同側ニ二點A,Bアリテ垂線AM=4寸, BN=5寸及MN=40寸ナルトキAヨリMN上ノ一點ヲ經テBニ達スル最短距離ハ幾許ナルカ。

(157)　平行四邊形ABCDノ一邊BCヲ適宜ニQマデ延長シ直線AQガ對角線BDトEニ交リ邊CDトPニ交ルトキハ $\overline{AE}^2=PE.EQ$。　(商船)

(158)　梯形ノ平行邊ヲ a, b トシ高サヲ h トスレバ他ノ二邊ノ交點ヨリ長キ平行邊ニ至ル距離如何。　(海兵)

(159)　直角三角形ABCノ斜邊ABヲ底トシ其高サCDヲ直徑トスル圓ト二邊AC及CBトノ交ル點ヲ夫々E及Fトセヨ。而シテBF, AE, EC及ACヲ順次ニ x, y, a 及 b トスレバ $x:y=a^3:b^3$ ナリ,之ヲ證セヨ。　(商船)

(160)　三角形ABCノ邊AB上ニ $\frac{1}{3}$AB ニ等シクAA′ヲ取リ邊BC上ニ $\frac{1}{4}$EC ニ等シクBB′ヲトリ邊CA上ニ $\frac{1}{5}$CA ニ等シクCC′ヲトリテ三角形A′B′C′ヲ作ル;三角形A′B′C′ト三角形ABCトノ面積ノ比ヲ求ム。　(東工)

(161) 圓周上ノ一點Pヨリ弦PA, PB, PCヲ出シP點ニ於ケル切線ニ平行ナル直線トH, K, Lニ交ラシムルトキハ$PA.PH=PB.PK=PC.PL$。(陸士)

(162) 圓周上ノ二定點ヲ過ギ平行ナル弦ヲ引キ,其比ヲ所設ノ比ニ等シカラシメヨ。不能ノ場合アリヤ。

(163) 線分ABヲCニ於テ$CA:CB=m:n$ナルガ如ク內分シ, A, C, Bヲ過ギ平行線AA', CC', BB'ヲ引キABヲ截ラザル任意ノ直線ニ會セシムレバ

$$(m+n)CC'=m\,BB'+n\,AA'$$。

ABガ此直線ニ交ルトキハ如何。

(164) 二定圓ヲ等角ノ下ニ見ル點ノ軌跡如何。

(165) 二圓ノ共通切線ハ中心線上ニ於テ相交リ且之ヲ半徑ノ比ニ分ツ。

注意。 此交點ヲ兩圓ノ**相似中心**ト云フ。

(166) 三角形ノ各角ノ大サ一定シ其一頂點ハ固定シ第二ノ頂點ハ定直線又ハ定圓周上ヲ動クトキ第三ノ頂點ノ軌跡如何。 (海兵)

(167) 所設ノ三角形ト相似ニシテ最大ナル三角形ヲ他ノ所設ノ三角形ニ外接セシメヨ。(岡醫)

(168) 一邊ト高サトノ和ヲ知リテ正三角形ヲ作レ。 (商船)

(169) AトBトヲ定直線ノ同側ニアル二定點トシABノ延長ト其線トノ交點ヲCトス。Cノ各側ニ於テABヲ最大角ノ下ニ見ルベキ點ヲ此線中ニ求メヨ。 (大豫・農實・大工)

(170) AトBトヲ定圓外ノ二定點トシ此圓周上ニ於テABヲ最大角或ハ最小角ノ下ニ見ルベキ點ヲ求メヨ。

(171) 一定點ヲ過ギ二定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。 (七高・商船・大工)

(172) 二定點ニ至ル距離ノ和又ハ差ガ所設ノ線分ニ等シカルベキ點ヲ定直線中ニ求メヨ。

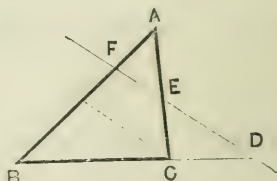
(173) 定點ヲ通過シテ直線ヲ引キ所設ノ角ノ二邊ヲ截リ此點ニテ分タレタル線分ノ矩形ヲシテ所設ノ正方形ニ等シカラシメヨ。

(174) △ABCノ底BCニ平行ナル直線DEヲ引キAヨリBE, CDノ交點Fヘ引ケル直線ガDE.BCニ交ル點ヲ夫々H, KトスレバA, F, H, Kハ調和列點ナリ。 (陸士)

(175) 所設ノ半圓ノ直徑 BC ニ垂線 DG ヲ立テ弧上ニ任意ノ點 A ヲ設ケテ AB, AC ガ DG ニ交ル點ヲ E, F トスレバ $\overline{DG}^2=DE.DF$ ナリ。 (東師)

(176) 直線外ニ一點 A アリテ反對ノ側ニ在ル平行線上ニ B 點アリ。今 A ヨリ直線 AMN ヲ引キ二ツノ平行線ト M, N ニ交ラシメ BM=BN ナラシメヨ。又幾ツ引キ得ルカ。 (東師)

(177) 三角形ヲ成セル三直線ヲ割線ニテ截ルトキ生ズル所ノ邊ノ六部分ノ中,隣ラザル三部分ノ積ハ他ノ三部分ノ積ニ等シ。

［三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ト割線トノ交點ヲ D, E, F トスレバ

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1］。$$ (*Menelaus*)

(二高)

(178) 三角形ノ三邊上ニ三點アリテ其中奇數ハ邊ノ延長中ニ,偶數ハ邊中ニ在リ,且相隣ラザル三線分ノ積ガ他ノ三線分ノ積ニ等シキトキ此三點ハ同一ノ直線上ニアリ。

(179)　三角形ノ三頂點ヨリ出デ同一ノ點ヲ通過スル三直線ニテ分タレタル三邊ノ部分ノ中,相隣ラザル三部分ノ積ハ他ノ三部分ノ積ニ等シ。

(*Ceva*)

(180)　上ノ定理ノ逆ヲ證セヨ。

(181)　三角形ノ各外角ノ二等分線ト對邊トノ三交點ハ同一ノ直線上ニアリ。　(盛農)

(182)　三角形ノ內接圓ノ切點ヲ對角ノ頂點ニ連ヌル線ハ同一ノ點ヲ通過ス。

(183)　所設ノ線分ヲ三部ニ分チ,第一,第二ノ比及第二,第三ノ比ヲ夫々所設ノ線分ノ比ニ等シカラシメヨ。

(184)　三角形ABCノ三頂點及形內ノ一點Oヲ過ギ對邊ニ至ル三線ヲAA′, BB′, CC′トスルトキ

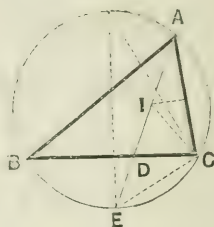
$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1.$$

O點ガ形外ニ在ラバ題文ヲ如何ニ變ズベキカ。

(185)　三角形ABCノ頂角Aノ二等分線ヲADトスレバ $AB.AC=\overline{AD}^2+BD.CD$。 (次頁ノ圖ヲ見ヨ)。又AD′ヲAノ外角ノ二等分線トスレバ

$AB.AC=BD'.CD'-\overline{AD'}^2$。

（東工·商船·長商）

(186)　右ノ圖ニ於テ AE ヲ內心 I ヲ過グル外接圓ノ弦トスルトキ

$AI.IE=2Rr$。

但 R, r ハ夫々外接圓及內接圓ノ半徑ナリ。

(187)　一邊ト之ニ對スル角及內接圓ノ半徑トヲ知リテ三角形ヲ作レ。　（陸士）

(188)　梯形ノ底ニ平行ナル線ヲ引キ其面積ヲ二等分セヨ。　（東工·海兵）

(189)　所設ノ三角形ノ底ニ平行ナル直線ヲ引キ其面積ヲ既知ノ比ニ分テ。（山商·海機·農實·東北豫）

(190)　四邊ガ夫々一直線上ニアル四定點ヲ通過スベキ正方形ヲ作レ。

(191)　圓ニ外接スル等邊多角形ノ邊數ガ奇數ナルモノハ正多角形ナリ。

(192)　圓ニ內接スル等角多角形ノ邊數ガ奇數ナルモノハ正多角形ナリ。

(193)　圓ニ外接スル等角多角形ハ正多角形ナリ。

(194)　次ノ正多角形ヲ以テ周角ヲ充塞シ得。

[1]　正三角形六個。

[2]　正六角形三個。

[3]　正八角形二個及正方形一個。

[4]　正方形ト正六角形ト正十二角形。

[5]　正五角形二個ト正十角形。

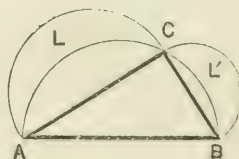
(195)　矩形ノ面積ハ其二隣邊上ノ正方形ノ兩對角線ノ夾ム矩形ノ半ニ等シ。

(196)　半圓ノ內接正方形ト全圓ノ內接正方形トノ積ノ比ハ2:5ナリ。

(197)　正多角形ノ邊數ガ偶數ナレバ對稱ノ中心アリ。又邊數ガ奇數ナレバ對稱ノ中心ナシ。

(198)　n邊ノ正多角形ハn個ノ對稱軸ヲ有ス

(199)　不等ナル兩圓ニ於テ等長ナル弧ニ對スル中心角ハ半徑ト反比例ヲナス。

(200)　直角三角形ABCノ三邊上ニ半圓ヲ同方向ニ畫クトキ新月形L,L'ノ和ハ△ABCニ等シ。

(*Hippocrates*)　(東工)

(201) 圓形ノ池アリ,其形外ノ點ヨリ之ヲ二切線ヲ引クトキ其長サハ各18間ニシテ其間ノ角ハ60°ナリ,池ノ直徑如何。

(202) 内外二重ノ柵ヲ有スル圓形ノ競馬場アリ,兩柵ノ間隔六間ニシテ其中央ニ於ケル周圍一里ナリ,各柵ノ長サ如何。 (海兵)

(203) 三角形ノ三邊ノ長サガ845,910,975ナルトキ頂點ヨリ對邊ニ引ケル垂線ニテ分タレタル各邊ノ二部分ノ長サヲ計算セヨ。

答 $\begin{cases}350\\495\end{cases}$ $\begin{cases}325\\585\end{cases}$ $\begin{cases}429\\546.\end{cases}$

(204) 四邊ノ長サヲ知リテ梯形ノ高サ及面積ヲ計算スル方法如何。

附　録　二

希　臘　字　母

GREEK ALPHABET

WITH

PRONUNCIATIONS

Α	*α*	Alpha	*Ν*	*ν*	Nu
Β	*β*	Beta	*Ξ*	*ξ*	Xi
Γ	*γ*	Gamma	*Ο*	*ο*	Omicron
Δ	*δ*	Delta	*Π*	*π*	Pi
Ε	*ε*	Epsilon	*Ρ*	*ρ*	Rho
Ζ	*ζ*	Zeta	*Σ*	*σ*, *ς*	Sigma
Η	*η*	Eta	*Τ*	*τ*	Tau
Θ	*θ*	Theta	*Υ*	*υ*	Upsilon
Ι	*ι*	Iota	*Φ*	*φ*	Phi
Κ	*κ*	Kappa	*Χ*	*χ*	Chi(like Ki)
Λ	*λ*	Lambda	*Ψ*	*ψ*	Psi
Μ	*μ*	Mu	*Ω*	*ω*	Omega

定理索引

定 理 索 引

直 線 圖 形

圓

面 積

比　例

正多角形及圓

明治三十七年三月七日印刷
明治四十二年一月廿五日修正七版發行
明治四十四年十二月廿五日修正九版印刷
明治四十五年三月七日訂正十版印刷

明治三十七年三月十日發行
明治四十二年三月十二日訂正八版發行
明治四十四年十二月廿八日修正九版發行
明治四十五年三月十日訂正十版發行

新撰幾何學教科書(平面)
定價六拾五錢

編纂者　林鶴一
東京市小石川區小日向水道町七十三番地

發行者　西野虎吉
東京市牛込區市谷加賀町一丁目十二番地

印刷者　藤本兼吉
東京市小石川區小日向水道町七十三番地

發行所　開成館
【振替貯金口座】東京第五參貳貳番

大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角
西部販賣所　三木佐助

東京市日本橋區數寄屋町九番地
東部販賣所　林平次郎

(株式會社秀英舍第一工場印刷)